Problème 1 - Mines MP 2021 - épreuve 2

Dans ce problème, on propose de définir la notion d'image d'une matrice réelle symétrique par une fonction d'une variable réelle, puis d'étudier quelques propriétés de cette notion (en particulier, relativement à la continuité et à la convexité). Ces notions présentent un intérêt en sciences physiques (statistique ou quantique).

Notations

Dans tout le problème :

— n désigne un entier naturel non nul ;
— si p et q sont des entiers naturels, l'ensemble des entiers k tels que $p \leqslant k \leqslant q$ est noté $[\![p, q]\!]$;
— si i et j sont des entiers naturels, alors $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon ;
— B_n désigne l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même ;
— I est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est ni vide ni réduit à un singleton ;
— $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$;
— une fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ est dite polynomiale s'il existe P un polynôme réel tel que, pour tout $x \in I, \varphi(x) = P(x)$;
— $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $D_n(\mathbb{R})$, resp. $S_n(\mathbb{R})$, resp. $O_n(\mathbb{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. diagonales, resp. symétriques, resp. orthogonales) d'ordre n à coefficients réels, et on confond un élément de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ avec son unique coefficient ;
— on note Tr l'application trace définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;
— si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note M^T sa transposée, on note $\mathrm{Sp}(M)$ son spectre réel, et si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, [M]_{i,j}$ est le coefficient de M situé à la i-ème ligne et j-ème colonne ;
— on munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de sa norme infinie, notée $\|\cdot\|$ et définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|M\| = \max\{|[M]_{i,j}|,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$$

— $S_n(I)$ désigne l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ dont le spectre réel est inclus dans I ;
— si $u = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$, on dit que ce n-uplet est croissant si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$(i \leqslant j) \Longrightarrow (u_i \leqslant u_j)$$

— si $i_0 \in [\![1, n]\!]$, on appelle nombre d'occurrences de u_{i_0} dans u le cardinal de l'ensemble $\{i \in [\![1, n]\!] ; u_i = u_{i_0}\}$
— enfin $\mathrm{Diag}\left((u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)$ désigne l'élément D de $D_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ [D]_{i,i} = u_i$$

on pourra noter cet élément en extension $D = \mathrm{Diag}(u_1, \ldots, u_n)$.

I. Matrices de permutations

Le but de cette partie est d'étudier l'action sur les matrices diagonales de la conjugaison par des matrices de permutations. On considère l'application ω de B_n dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall \sigma \in B_n, \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad [\omega(\sigma)]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$$

Q 1. Démontrer que pour tout $(\sigma, \sigma') \in B_n^2$, $\omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma)\omega(\sigma')$

Q 2. Démontrer que $\omega(B_n) \subset O_n(\mathbb{R})$.

Q 3. Soit $\sigma \in B_n$ et $(d_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que :

$$\mathrm{Diag}\left((d_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)\omega(\sigma) = \omega(\sigma)\,\mathrm{Diag}\left((d_{\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)$$

Q 4. En déduire l'équivalence suivante concernant deux éléments D et D' de $D_n(\mathbb{R})$,

i) D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D'.
ii) il existe $M \in \omega(B_n)$ telle que $D' = M^\mathsf{T} D M$.

II. Fonctions de matrices symétriques

Cette partie a pour objectif de définir une correspondance entre l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et l'espace des fonctions de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbb{R})$, puis d'en démontrer quelques propriétés. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Q 5. Soit $S \in S_n(I)$. Justifier l'existence de $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et de $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in I^n$ tels que :

$$S = \Omega^\top \operatorname{Diag}\left((s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right) \Omega$$

Q 6. Pour tout $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in I^n$, justifier l'existence d'un élément P de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(s_i) = f(s_i)$$

Soit $S \in S_n(I)$. On suppose que l'on dispose des deux écritures :

$$S = \Omega^\top \operatorname{Diag}\left((s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right) \Omega \text{ et } S = \Omega'^{\top} \operatorname{Diag}\left((s'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right) \Omega'$$

avec $\Omega, \Omega' \in O_n(\mathbb{R})$ et $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, (s'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in I^n$.

Q 7. Montrer que l'on a alors :

$$\Omega'^{\top} \operatorname{Diag}\left((f(s'_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}\right) \Omega' = \Omega^\top \operatorname{Diag}\left((f(s_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}\right) \Omega$$

puis que $\Omega^\top \operatorname{Diag}\left((f(s_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}\right) \Omega \in S_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite du problème, on note u l'application qui, à toute fonction φ de I dans $\mathbb{R}$, associe $u(\varphi)$ la fonction de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall S \in S_n(I), u(\varphi)(S) = \Omega^\top \operatorname{Diag}\left((\varphi(s_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}\right) \Omega$$

où $S = \Omega^\top \operatorname{Diag}\left((s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right) \Omega$, avec $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in I^n$.

Cette fonction est bien définie puisque, d'après la question précédente, $u(\varphi)(S)$ ne dépend pas du choix des matrices $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{Diag}\left((s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)$ avec $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in I^n$, tel que $S = \Omega^\top D \Omega$.

Enfin, on désigne par v l'application $\operatorname{Tr} \circ u$.

Q 8. Vérifier que u et v sont linéaires, puis pour toute fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in I$, calculer $u(\varphi)(xI_n)$.

Q 9. Étudier l'injectivité et la surjectivité de u.

Q 10. On suppose que f est polynomiale ; montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$. Réciproquement, est-il vrai que, s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$ $u(f)(S) = P(S)$, alors f est polynomiale ?

Q 11. Démontrer que, si $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur I vers une fonction φ, alors les suites $(u(\varphi_k))_{k \in \mathbf{N}}$ et $(v(\varphi_k))_{k \in \mathbf{N}}$ convergent simplement sur $S_n(I)$.
Y a-t-il convergence uniforme sur $S_n(I)$ si l'on suppose que $(\varphi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur I ?

III. Norme et convexité

L'objectif de cette partie est de munir $S_n(\mathbb{R})$ d'une nouvelle norme qui permettra de compléter l'étude des fonctions de matrices symétriques.

Q 12. On note $\Sigma = \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}); X^\top X = 1\right\}$. Démontrer que si $S \in S_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\min(\operatorname{Sp}(S)) = \min\left\{X^\top S X; X \in \Sigma\right\} \text{ et } \max(\operatorname{Sp}(S)) = \max\left\{X^\top S X; X \in \Sigma\right\}$$

Q 13. Montrer finalement que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbb{R})$ et que l'application ρ, de $S_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, qui à toute matrice $M \in S_n(\mathbb{R})$ associe

$$\max\{|\lambda|; \lambda \in \operatorname{Sp}(M)\}$$

est une norme sur $S_n(\mathbb{R})$.

IV. Continuité des fonctions de matrices symétriques

Dans cette partie, à l'aide de la norme précédemment introduite, on démontre quelques résultats relatifs à la continuité des fonctions de matrices symétriques. On suppose désormais $S_n(\mathbb{R})$ muni de la norme ρ et on appelle χ l'application de $S_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui, à tout élément de $S_n(\mathbb{R})$, associe son polynôme caractéristique.

On définit aussi l'application, notée $\mathrm{Sp}_{\uparrow}$, qui à toute matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$, associe son spectre croissant (c'est-à-dire le n-uplet croissant des valeurs propres de S dans lequel le nombre d'occurrences de chaque valeur propre coïncide avec son ordre de multiplicité).

Q 14. Démontrer que χ est continue.

On souhaite maintenant prouver que $\mathrm{Sp}_{\uparrow}$ est continue. à cet effet, on introduit un élément M de $S_n(\mathbb{R})$ et une suite $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M. Si $k \in \mathbf{N}$, on note $\Lambda_k = \mathrm{Sp}_{\uparrow}(M_k)$

Q 15. Démontrer que la suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence croissante.

Q 16. Montrer que, si α est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que la suite $\left(\Lambda_{\alpha(k)}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ converge, alors : $\Lambda_{\alpha(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Sp}_{\uparrow}(M)$.

Q 17. En déduire que $\mathrm{Sp}_{\uparrow}$ est continue.

Q 18. Démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Q 19. Démontrer que, si $\varphi \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$, alors $u(\varphi)$ et $v(\varphi)$ sont continues.

V. Convexité des fonctions de matrices symétriques

On démontre maintenant quelques résultats relatifs à la convexité des fonctions de matrices symétriques. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Q 20. On suppose ici que f est convexe sur I et que $S \in S_n(I)$. On note

$$\mathcal{U}_S = \left\{\Omega^{\mathsf{T}} S \Omega ; \Omega \in O_n(\mathbb{R})\right\}$$

Justifier que pour tout $U \in \mathcal{U}_S$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $[U]_{k,k} \in I$. Démontrer alors que :

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{n} f\left([U]_{k,k}\right) ; U \in \mathcal{U}_S\right\} = v(f)(S)$$

Q 21. En déduire que, si f est convexe sur I, pour tout $(A,B) \in S_n(I)^2$, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$v(f)((1-t)A + tB) \leqslant (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)$$

On dit qu'une fonction ψ de $S_n(I)$ dans $\mathbb{R}$ est convexe sur $S_n(I)$ si elle vérifie la relation :

$$\forall (A,B) \in S_n(I)^2, \forall t \in [0,1], \quad \psi(((1-t)A + tB) \leqslant (1-t)\psi(A) + t\psi(B)$$

Q 22. Démontrer que la fonction $v(f)$ est convexe sur $S_n(I)$ si et seulement si f est convexe sur I.