Exercice 1

Q 1. Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q 2. Application : On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} &= -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de α_0, β_0, γ_0 et n.

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$.

On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre et $\mathscr{T}_n$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

Q 3. Dans cette question, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle à diagonale propre ? Si oui, est-elle diagonalisable ? Reprendre les mêmes questions avec la matrice B (*on pourra calculer* $\det(4I_3 - B)$).

Q 4. Comparer les deux ensembles $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{T}_n$. L'ensemble $\mathscr{P}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

Q 5. Montrer que toute matrice de $\mathscr{P}_n$ est semblable à une matrice de $\mathscr{T}_n$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 6. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que $A^\top$ désigne la matrice transposée de la matrice A.

Calculer $\mathrm{tr}(A^\top A)$ en fonction des coefficients de la matrice A.

Q 7. On suppose dans cette question que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle.

a) Justifier l'existence des n valeurs propres réelles, distinctes ou non de la matrice A, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Démontrer que $\mathrm{tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

b) Déterminer les matrices symétriques réelles à diagonale propre.

Q 8. On suppose dans cette question que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique à diagonale propre.

a) Que dire à propos de la diagonale de A ? Montrer que $A^n = 0$, puis que $(A^\top A)^n = 0$.

b) Montrer que la matrice $A^\top A$ est diagonalisable, puis qu'elle est nulle.

c) Déterminer les matrices antisymétriques réelles à diagonale propre.

Problème 1 - CCINP MPI 2024

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul n, une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite ***définie positive*** si et seulement si :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top M X > 0.$$

Q 1. Démontrer, en utilisant directement la définition précédente, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive.

I. Caractérisation spectrale

Q 2. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.

Q 3. Application : Démontrer que le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

Démontrer alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

II. Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive
si et seulement si
sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

Q 4. Démontrer qu'une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $\operatorname{tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Q 5. Démontrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.

Q 6. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai pour les matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

III. Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le *critère de Sylvester*, valable en toute dimension.

Pour une matrice carrée quelconque $M = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier $k \in [\![1,n]\!]$, on définit le k^{e} *mineur principal* comme étant le déterminant de la matrice $M_k = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,k]\!]} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$. On précise qu'une matrice carrée de taille n possède n mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de la **question 3**, sont les déterminants des matrices $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Par exemple, pour la matrice B de la **question 3**, on constate que :

$$\det(B_1) = 1 > 0, \quad \det(B_2) = 2 > 0, \quad \det(B_3) = 3 > 0.$$

La matrice B vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

Q 7. On fixe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in [\![1,n]\!]$, ainsi qu'un vecteur colonne non nul $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

Déterminer un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que :

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X.$$

Q 8. Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille n de la matrice.

Q 9. Soit $n \geqslant 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$. On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec } M_{n-1} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.

Justifier l'existence d'un vecteur colonne $V \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V + U = 0$.

En notant $Q = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, démontrer alors que $Q^\top M Q$ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.

Q 10. Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Q 11. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?

Q 12. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ? Justifier.

Q 13. Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

Q 14. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle définie positive ?

****

Devoir surveillé 6 - sujet CCINP-E3A - Corrigé

Exercice

Q 1. Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ 0 & X-4 & 6 \\ -(X+2) & -1 & X+3 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 2 \\ 0 & X-4 & 6 \\ 0 & -3 & X+5 \end{vmatrix} = (X+2)((X-4)(X+5)+18) \\
&= (X+2)(X^2+X-2) = (X-1)(X+2)^2.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\chi_A(X) = (X-1)(X+2)^2.}$ χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Les valeurs propres de A sont $\mathrm{Sp}(A) = \{1, -2\}$. Calculons les sous-espaces propres de A :

$$\begin{aligned}
A - I_3 &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -6 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
A + 2I_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad E_{-2}(A) = \mathrm{Ker}(A + 2I_3) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et pour chaque valeur propre de A, la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique : $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 1$ et $\mathrm{Ker}((A + 2I_3)) = 2$.

Donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$ Posons :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.}$$

Q 2. La relation de récurrence entre les trois suites se réécrit sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{X_{n+1} = AX_n.}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$ donc $X_n = PY_n$. D'où

$$Y_{n+1} = P^{-1}X_{n+1} = P^{-1}(AX_n) = P^{-1}A(PY_n) = (P^{-1}AP)Y_n = DY_n.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{Y_{n+1} = DY_n}$. Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_n = D^nY_0$.

Or $D = \mathrm{Diag}(1, -2, -2)$ est diagonale donc $D^n = \mathrm{Diag}(1, (-2)^n, (-2)^n)$.

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = D^nY_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ (-2)^n\beta_0 \\ (-2)^n\gamma_0 \end{pmatrix}.}$

En particulier, la suite (α_n) est constante donc converge. La suite $(\beta_n) = ((-2)^n\beta_0)$ converge si et seulement si $\beta_0 = 0$. La suite $(\gamma_n) = ((-2)^n\gamma_0)$ converge si et seulement si $\gamma_0 = 0$.

Les deux applications

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ Z & \mapsto & P^{-1}Z \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ Z & \mapsto & PZ \end{array} \right.$$

sont linéaires sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc elles sont continues. Par continuité de u, si la suite (X_n) converge, alors la suite $(Y_n) = (u(X_n))$ converge. Par continuité de v, si la suite (Y_n) converge, alors la suite $(X_n) = (v(X_n))$ converge. Donc la suite (X_n) converge si et seulement si la suite (Y_n) converge.

En dimension finie, une suite converge si et seulement si toutes les suites de ses coordonnées dans une base convergent.

On a donc les équivalences :

$$\begin{array}{ll} & \text{Les suites } (u_n),\ (v_n),\ (w_n) \text{ convergent simultanément} \\ \Leftrightarrow & \text{la suite } (X_n) \text{ converge} \\ \Leftrightarrow & \text{la suite } (Y_n) \text{ converge} \\ \Leftrightarrow & \text{les suites } (\alpha_n),\ (\beta_n),\ (\gamma_n) \text{ convergent simultanément} \\ \Leftrightarrow & \beta_0 = \gamma_0 = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists \alpha_0 \in \mathbb{R} \quad Y_0 = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \exists \alpha_0 \in \mathbb{R} \quad X_0 = PY_0 = \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \operatorname{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent simultanément si et seulement si } \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in \operatorname{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}(A - I_3)}$$

si et seulement si $\exists \alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u_0 = 2\alpha_0$, $v_0 = 6\alpha_0$ et $w_0 = \alpha_0$.

Si cette condition est remplie, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = \alpha_0, \quad \beta_n = \gamma_n = 0.$$

Alors la suite (Y_n) est constante : $\forall n \in \mathbb{N}\ Y_n = Y_0$. Donc la suite (X_n) est constante : $\forall n \in \mathbb{N}\ X_n = X_0 = PY_0$.

$$\boxed{\exists \alpha_0 \in \mathbb{R} \quad X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} u_n & = & u_0 & = & 2\alpha_0. \\ v_n & = & v_0 & = & 6\alpha_0. \\ w_n & = & w_0 & = & \alpha_0. \end{array} \right.}$$

Exercice

Q 3. On calcule le polynôme caractéristique de A : $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$, donc A est à diagonale propre. De plus, $\operatorname{rg}(A - 2I_3) = 2$ donc $\dim \operatorname{sep}(A, 2) = 1 \neq 2 =$ ordre de multiplicité de la racine 2 dans χ_A, donc A n'est pas diagonalisable.

Si B est à diagonale propre, alors ses valeurs propres sont 5 et 4. Or un simple calcul montre que $\det(4I_3 - B) = 16 \neq 0$, donc 4 n'est pas valeur propre de B : contradiction. Donc B n'est pas à diagonale propre.

Q 4. Toute matrice triangulaire a pour valeurs propres ses coefficients diagonaux, donc son polynôme caractéristique est bien $\prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$, *i.e.* la matrice est à diagonale propre. Ceci prouve l'inclusion $\mathscr{T}_n \subset \mathscr{P}_n$. Il n'y a pas égalité, car la question précédete donne une matrice A qui est à diagonale propre mais n'est pas triangulaire.

$\mathscr{P}_n$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, car il n'est pas stable par $+$:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la somme de deux matrices triangulaires donc la somme de deux éléments de $\mathscr{P}_3$ mais n'est pas dans $\mathscr{P}_3$.

Q 5. Toute matrice $M \in \mathscr{P}_n$ a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$, donc est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, *i.e.* semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire semblable à un élément de $\mathscr{P}_n$ d'après ce qui précède.

Q 6. $\operatorname{tr}(A^\mathsf{T} A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2$.

Q 7.

a) A est symétrique réelle, donc d'après le th. spectral, elle est orthodiagonalisable, donc elle possède n valeurs propres réelles, distinctes ou non, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On note $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ et $P^{-1} = P^\mathsf{T}$ donc $A^\mathsf{T} A = A^2 = PD^2P^{-1}$. Donc comme $A^\mathsf{T} A$ et D^2 sont semblables, elles ont la même trace : $\operatorname{tr}(A^\mathsf{T} A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

b) Si A est symétrique réelle à diagonale propre, alors ses valeurs propres sont $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$, donc d'après la question précédente, $\operatorname{tr}(A^\mathsf{T} A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2$.

Or d'après la question **Q 3**, $\operatorname{tr}(A^\mathsf{T} A) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2$, donc $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2$, *i.e.* $\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} a_{i,j}^2 = 0$.

Une somme de réels positifs est nulle si et s.si tous les réels sont nuls, donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$, donc la matrice A est diagonale.

La réciproque est évidente.

Donc les matrices symétriques réelles à diagonale propre sont les matrices diagonales.

Q 8.

a) La diagonale d'une matrice antisymétrique est nulle, donc comme A est antisymétrique et à diagonale propre, toutes ses valeurs propres sont nulles et son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^n$. Or d'après le th. de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est annulateur de A, donc $A^n = 0$.

Donc $(A^\mathsf{T} A)^n = (-A^2)^n = (-1)^n A^{2n} = (-1)^n (A^n)^2 = 0$.

b) La matrice $A^\mathsf{T} A$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Or le polynôme X^n est annulateur, donc ses valeurs propres font partie des racines de ce polynôme annulateur, qui a pour seule racine 0. Comme $A^\mathsf{T} A$ est diagonalisable, elle est donc semblable à la matrice nulle, donc est nulle.

c) On a montré que $A^\mathsf{T} A = 0$, donc d'après la question **Q 6**, $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = 0$. La somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, donc il vient $A = 0$.

La seule matrice antisymétrique réelle à diagonale propre est la matrice nulle.

Problème 1

Q 1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$X^T A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 \geqslant 0.$$

De plus, si $X^T AX = 0$, alors $x_1 = 0$ et $x_1 + x_2 = 0$, donc $x_1 = x_2 = 0$ et $X = 0$. Ainsi, si $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, alors on a ($X^T AX \geqslant 0$ et $X^T AX \neq 0$), donc $X^T AX > 0$. Donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est définie positive.}}$

I.

Q 2. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Montrons que A est définie positive si et s.si $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que A est définie positive. Alors $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^T AX > 0$. Soit λ une valeur propre de A. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à λ : $AX = \lambda X$. Alors

$$X^T AX = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2 > 0.$$

Or $\|X\|^2 > 0$ donc $\lambda > 0$.

Toutes les valeurs propres de A sont strictement positives : $\boxed{\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*.}$

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. Alors $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(A), \lambda > 0$. A est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale réelle, telles que $P^T AP = D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Posons $Y = PX = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^T$. Alors $Y \neq 0$ (car P est inversible et $X \neq 0$).

$$X^T AX = X^T P^T DPX = (PX)^T D(PX) = Y^T DY = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_i y_j = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{>0} y_i^2 > 0,$$

car $\exists i \in [\![1,n]\!],\ y_i \neq 0$. Donc $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^T AX > 0$. Ainsi A est définie positive.

On a donc démontré la caractérisation spectrale :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

Q 3. On considère le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$.

On calcule : $P'(X) = 3X^2 - 12X + 9 = 3(X^2 - 4X + 3) = 3(X-1)(X-3)$. Les racines de P' sont 1 et 3.

Etablissons le tableau de variation de P :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$P'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

On observe que $P(0) < 0$, $P(1) > 0$, $P(3) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$, et P est une fonction polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur $[0,1]$, $[1,3]$ et $[3,+\infty[$, le polynôme P admet trois racines réelles distinctes appartenant respectivement aux intervalles $]0,1[$, $]1,3[$ et $]3,+\infty[$.

Donc le polynôme P admet trois racines réelles distinctes et strictement positives.

Calculons le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \chi_B(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} &= (X-1)(X-2)(X-3) - (X-1) - (X-2) \\ &= (X^3 - 6X^2 + 11X - 6) - 2X + 3 &= X^3 - 6X^2 + 9X - 3 = P(X). \end{aligned}$$

Puisque $\chi_B = P$, le spectre de B, qui est l'ensemble des racines de χ_B, est l'ensemble des racines de P, qui sont trois réels strictement positifs. Donc $\boxed{B \text{ est une matrice symétrique réelle vérifiant } \mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+^*.}$ D'après la caractérisation spectrale de la question **Q 2.**, $\boxed{B \text{ est définie positive.}}$

II.

Q 4. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive. D'après le théorème spectral, puisque M est symétrique réelle, M est diagonalisable en base orthonormée. Donc M possède n valeurs propres réelles comptées avec multiplicités.

Notons $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ces valeurs propres. D'après la caractérisation spectrale de la question **Q 2.**, on a $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $\forall k \in [\![1,n]\!]\,,\ \lambda_k > 0$.

Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale réelle, telles que $P^T AP = D$.

Puisque M et D sont semblables, elles ont même trace et même déterminant :

$$\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(D) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k}_{>0} > 0. \quad \det(M) = \det(D) = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k}_{>0} > 0.$$

Une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $\mathrm{tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Q 5. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle vérifiant $\mathrm{tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Par le théorème spectral, puisque M est symétrique réelle, M est diagonalisable en base orthonormée. Donc M possède deux valeurs propres réelles comptées avec multiplicités, notées λ_1 et λ_2 et M est orthogonalement semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Puisque M et D sont semblables, elles ont même trace et même déterminant.

D'une part, $\det(M) = \det(D) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$, donc λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe.

D'autre part, $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ donc λ_1 et λ_2 sont strictement positives.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*.}$ D'après la caractérisation spectrale de la question **Q 2.**, $\boxed{M \text{ est définie positive.}}$

Une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.

Q 6. Soit la matrice diagonale $\boxed{D = \mathrm{Diag}(3, -1, -1).}$

D est une matrice symétrique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et vérifie $\mathrm{tr}(D) = 1 > 0$ et $\det(D) = 3 > 0$. Mais le spectre de D, $\mathrm{Sp}(D) = \{3, -1\}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

D'après la caractérisation spectrale de la question **Q 2.**, D n'est pas définie positive.

$\boxed{\text{Le résultat de la question } \mathbf{Q\ 5.} \text{ ne reste pas vrai pour les matrices symétriques de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$

III.

Q 7. Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in [\![1, n]\!]$, et $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$. On suppose de plus $\boxed{X_k \neq 0.}$

Déterminons un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que : $\quad X_k^T M_k X_k = X^T M X$.

<u>Si $k = n$.</u> On pose $\boxed{X = X_n}$ (non nul si X_n non nul.) On a $M_n = M$ et $X_n = X$, d'où le résultat.

<u>Si $k < n$.</u> On pose $\boxed{X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}.}$ On écrit la matrice M par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M_k & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} M_k & \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R}), \\ B & \in \mathscr{M}_{k,n-k}(\mathbb{R}), \\ C & \in \mathscr{M}_{n-k,k}(\mathbb{R}), \\ D & \in \mathscr{M}_{n-k}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Un produit matriciel par blocs donne :

$$X^T M X = \begin{pmatrix} X_k^T & 0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k^T & 0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k X_k \\ C X_k \end{pmatrix} = X_k^T M_k X_k.$$

$\boxed{\text{Le vecteur colonne } X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \text{ vérifie } X_k^T M_k X_k = X^T M X.}$

Q 8. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

La sous-matrice $M_k \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ est symétrique réelle.

Soit $X_k \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. D'après la question **Q 7.**, il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que

$$X_k^T M_k X_k = X^T M X.$$

Puisque M est définie positive et $X \neq 0$, on a $X^T M X > 0$.

On en déduit que $\forall X_k \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \;\; X_k^T M_k X_k > 0$. Donc la matrice M_k est définie positive.

D'après la question **Q 4.**, cette matrice vérifie $\det(M_k) > 0$.

On a montré que $\forall k \in [\![1, n]\!]\,, \; \det(M_k) > 0$ donc M vérifie le critère de Sylvester.

Donc $\boxed{\text{toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.}}$

Q 9. Soit $n \geqslant 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$.

On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_{n-1} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.

D'après la question **Q 8.**, M_{n-1} vérifie le critère de Sylvester, donc tous ses mineurs sont strictement positifs. En particulier $\det(M) = \det(M_{n-1}) > 0$, donc $\boxed{M_{n-1} \text{ est inversible.}}$

En posant $\boxed{V = (M_{n-1})^{-1}(-U)} \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, on a $\boxed{M_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}.}$

En transposant cette égalité et en utilisant que M_{n-1} est symétrique, on a également $\boxed{V^T M_{n-1} + U^T = 0_{1,n-1}.}$

Notons $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} Q^T M Q &= Q^T \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} &&= Q^T \begin{pmatrix} M_{n-1} & \boxed{M_{n-1}V + U} \\ U^T & U^T V + \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ U^T & U^T V + \alpha \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \boxed{V^T M_{n-1} + U^T} & U^T V + \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & U^T V + \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En posant $\beta = U^T V + \alpha$, on obtient $\boxed{Q^T M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}.}$

De plus, puisque $\det(Q) = 1$, on a

$$\beta \det(M_{n-1}) = \det(Q^T M Q) = \det(Q)^2 \det(M) = \det(M) > 0.$$

Or $\det(M_{n-1}) > 0$, donc $\boxed{\beta = \dfrac{\det(M)}{\det(M_{n-1})} > 0.}$

Q 10. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que toute matrice symétrique réelle $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Initialisation. Cas $n = 1$.

Soit $M = (a) \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ (toujours symétrique) vérifiant le critère de Sylvester. Alors $a = \det(M) > 0$.

Pour tout $X = (x) \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T M X = ax^2 > 0$ car $a > 0$ et $x \neq 0$. Donc M est définie positive.

Hérédité.

Supposons le résultat vrai au rang $(n-1)$ et montrons-le au rang n.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester. Alors tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

On reprend les notations de la question **Q 9.** :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_{n-1} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Puisque M est symétrique réelle, M_{n-1} est également symétrique réelle.

Les $(n-1)$ mineurs principaux de M_{n-1} sont aussi des mineurs principaux de M, donc sont strictement positifs, ce qui montre que $\underline{M_{n-1} \text{ vérifie aussi le critère de Sylvester.}}$

Par hypothèse de récurrence appliquée au rang $(n-1)$, $\underline{\text{la matrice } M_{n-1} \text{ est définie positive.}}$

D'après la question **Q 9.**, il existe $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant $\det(Q) = 1$ telle que

$$Q^T M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \beta > 0.$$

Montrons que $Q^T M Q$ est définie positive.

Soit $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, que l'on écrit $Y = \begin{pmatrix} Z \\ z \end{pmatrix}$ avec $Z \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{R}$. Un calcul par blocs donne :

$$Y^T (Q^T M Q) Y = \begin{pmatrix} Z^T & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^T & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} Z \\ \beta z \end{pmatrix} = Z^T M_{n-1} Z + \beta z^2.$$

$\boxed{\text{Si } Z \neq 0 :}$ puisque M_{n-1} est définie positive, on a $Z^T M_{n-1} Z > 0$ donc

$$Y^T (Q^T M Q) Y \geqslant Z^T M_{n-1} Z > 0.$$

$\boxed{\text{Si } Z = 0 :}$ alors $z \neq 0$ (car $Y \neq 0$). Il vient

$$Y^T (Q^T M Q) Y = \beta z^2 > 0 \text{ car } \beta > 0 \text{ et } z \neq 0.$$

Dans les deux cas, $Y^T (Q^T M Q) Y > 0$. Donc $\underline{\text{la matrice } Q^T M Q \text{ est définie positive.}}$

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Puisque $\det(Q) = 1$, la matrice Q est inversible.

On pose $Y = Q^{-1}X \neq 0$ car $X \neq 0$. Puisque $Q^T MQ$ est définie positive :

$$X^T MX = (QY)^T M(QY) = Y^T(Q^T MQ)Y > 0.$$

Donc la matrice M est définie positive, ce qui termine la récurrence.

$\boxed{\text{Toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.}}$

Q 11. Soit $x \in \mathbb{R}$. La matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle. Calculons les mineurs principaux de $C(x)$.

$$\begin{cases} \det(C_1(x)) &= \det(2) &= 2 & > 0. \\ \det(C_2(x)) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= 1 & > 0. \\ \det(C_3(x)) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} &= 1 - 2x^2. \end{cases}$$

Donc $C(x)$ vérifie le critère de Sylvester si et seulement si $\det(C_3(x)) > 0$. Or

$$\det(C_3(x)) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[.$$

D'après le critère de Sylvester, $\boxed{\text{la matrice } C(x) \text{ est définie positive si et seulement si } x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[.}$

Q 12. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique réelle. Calculons les mineurs principaux de A.

$$\begin{cases} \det(A_1) &= \det(2) &= 2 > 0. \\ \det(A_2) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &= 2 > 0. \\ \det(A_3) &= \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= 2 \times 2 - 2 \times 3 - 5 = -7 < 0. \end{cases}$$

(On a développé $\det(A_3)$ selon la première colonne.)

Le troisième mineur principal $\boxed{\det(A_3) = -7 < 0}$ est strictement négatif.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_5(\mathbb{R}) \text{ ne vérifie pas le critère de Sylvester donc } A \text{ n'est pas définie positive.}}$$

Q 13. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique réelle. Calculons les mineurs principaux de A.

$$\begin{cases} \det(A_1) &= \det(4) &= 4 > 0. \\ \det(A_2) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= 3 > 0. \\ \det(A_3) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= -\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{4} > 0. \end{cases}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \text{ vérifie le critère de Sylvester donc } A \text{ est définie positive.}}$$

Puisque A est définie positive, on a :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T AX > 0.$$

Or

$$\begin{aligned} X^T AX &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x + y - \frac{3}{2}z \\ x + y \\ -\frac{3}{2}x + z \end{pmatrix} \\ &= x\left(4x + y - \frac{3}{2}z\right) + y(x+y) + z\left(-\frac{3}{2}x + z\right) &= 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.}$

Q 14. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \det(S_n)$. En développant le déterminant de S_n par rapport à la dernière colonne, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 3, \quad u_n = \det(S_n) = \sqrt{3}\det(S_{n-1}) - \det(S_{n-2}) = \sqrt{3}u_{n-1} - u_{n-2}.$$

On a de plus :

$$\begin{cases} u_1 = \det(S_1) &= \det(\sqrt{3}) &= \sqrt{3}. \\ u_2 = \det(S_2) &= \det\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} &= 2. \end{cases}$$

La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, définie par :

$$\begin{cases} \forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} - \sqrt{3}u_{n+1} + u_n &= 0. \\ u_1 &= \sqrt{3}. \\ u_2 &= 2. \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0$. On a $\Delta = -1 < 0$ ce qui donne deux racines distinctes complexes non réelles :

$$r_1 = e^{i\pi/6} \quad \text{ et } r_2 = e^{-i\pi/6}.$$

Puisque la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est réelle, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = a\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + b\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right).$$

On trouve (a,b) grâce aux valeurs de u_1 et u_2 :

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} = a\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\frac{\sqrt{3}}{2} + b\frac{1}{2}. \\ u_2 = 2 = a\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\frac{1}{2} + b\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b\sqrt{3} &= 6. \\ a + b\sqrt{3} &= 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1. \\ b &= \sqrt{3}. \end{cases}$$

Finalement,

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\det(S_n) = u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right).}$$

On peut en particulier calculer les premiers termes de la suite :

$$\begin{cases} \det(S_1) &= \sqrt{3} &> 0. \\ \det(S_2) &= 2 &> 0. \\ \det(S_3) &= \sqrt{3} &> 0. \\ \det(S_4) &= 1 &> 0. \\ \det(S_5) &= 0. \end{cases}$$

La matrice S_n est symétrique réelle. Les mineurs principaux de S_n sont les $\det(S_k)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$.

Si $n \in [\![1, 4]\!]$, les mineurs principaux de S_n sont tous strictement positifs. Par le critère de Sylvester, S_n est définie positive.

Si $n \geqslant 5$, le cinquième mineur principal est nul : $\det(S_5) = 0$. Par le critère de Sylvester, S_n n'est pas définie positive.

$$\boxed{\text{La matrice } S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est définie positive si et seulement si } n \in \{1, 2, 3, 4\}.}$$