

ESPACES EUCLIDIENS

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

*1) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$.

- Montrez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
- Dans le cas où $n = 2$, donnez une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$
- Calculez la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

*2) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire classique $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T \cdot B)$

- Montrez que si A est symétrique et B est antisymétrique, alors A et B sont orthogonales pour ce produit scalaire.
- Déterminez $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.
- Dans le cas où $n = 2$, calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures.
- Dans le cas général, calculez la distance de la matrice M remplie de 1 à F , s.e.v. des matrices de trace nulle.

**3) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)Q(k)}{2^k}$.

- Montrez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
- Donnez une base orthonormée du sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$.
- Calculez la distance de X^2 à $\text{vect}(1, X)$.

**4) Même exercice avec $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$.

**5)

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.
- Calculer T_0, T_1 puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. En déduire le degré et le coefficient dominant de T_n .
- Montrez que l'application $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Montrez que la famille (T_n) est orthogonale pour ce produit scalaire.

**6) Soit E l'ensemble des suites réelles x telles que la série $\sum_{n \geq 0} x_n^2$ converge.

- Vérifiez rapidement que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
- Soit x, y deux éléments de E . Montrez que la série $\sum_{n \geq 0} x_n y_n$ est absolument convergente.
- Montrez que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- On pose $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$. Montrez qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

*7) Soit E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée \mathcal{B}_0 dans laquelle toutes les coordonnées sont exprimées. Soit u de coordonnées $(1, 3, 1)$, v de coordonnées $(5, 2, -1)$ et $w(1, 1, 1)$

- Donnez un système d'équations et une base d'un supplémentaire de chacun des s.e.v. $\text{vect}(u)$ et $\text{vect}(u, v)$.
- Déterminez la projection orthogonale de v sur la droite $\text{vect}(u)$.
- Déterminez la projection orthogonale de w sur le plan $\text{vect}(u, v)$.
- Déterminez la matrice du projecteur orthogonal sur le plan précédent.

*8) Soit E un espace euclidien de dimension 4, on fixe une base orthonormée \mathcal{B}_0 dans laquelle toutes les coordonnées sont exprimées. Soit $F = \{x \in E / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

- Justifiez que F est un s.e.v. de E . Donnez une base orthonormée de F .
- Soit v de coordonnées $(2, 3, 1, -1)$, déterminez sa projection orthogonale sur F .
- Déterminez la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F .

****9)** Soit $E = C^0([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f|g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$.

Déterminez $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (x - (a \cos x + b \sin x))^2 dx$.

****10)**

a) Déterminez $\inf_{x \in \mathbb{R}} ((2x - b_1)^2 + (3x - b_2)^2 + (4x - b_3)^2)$ où b_1, b_2, b_3 sont fixés dans \mathbb{R} .

b) Déterminez $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^n (k^2 - ak - b)^2$ (on admet $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et $\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$)

c) Déterminez $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 x^2 dx$.

d) Déterminez $\inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-\pi}^\pi (t - a \sin t - b \cos t - c)^2 dt$.

****11)** Soit E un espace euclidien, \mathcal{B} une base de E . Pour $x, y \in E$, on note X, Y les matrices-colonnes des coordonnées de x et y dans cette base.

a) Montrez qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, y \rangle = X^T A Y$. La matrice A est appelée la matrice du produit scalaire dans la base \mathcal{B} . À quelle condition A est-elle égale à I_n ?

b) Montrez que A est une matrice symétrique inversible et que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

c) Soit \mathcal{B}' une autre base de E , A' la matrice du produit scalaire dans la base \mathcal{B}' . Donnez une relation entre A et A' .

d) Montrez qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P^T P$.

****12)** Soit E un espace euclidien de dimension p et $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in E^n$ des vecteurs unitaires tels que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$$

Montrez que $n = p$ et (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E .

****13)** Soit E un espace euclidien de dimension n et (e_1, e_2, \dots, e_n) une base orthonormée de E . Soit $(f_1, \dots, f_n) \in E^n$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|f_k - e_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Montrer que (f_1, \dots, f_n) est une base de E .

b) Montrer qu'en cas d'inégalité large, le résultat précédent serait faux.

****14)** Soit E un espace euclidien, F, G deux s.e.v. de E .

Montrez que $(F^\perp)^\perp = F$, $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

*****15)** On munit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Déterminez F^\perp puis $(F^\perp)^\perp$. Conclusion : a-t-on $E = F \oplus F^\perp$? $(F^\perp)^\perp = F$?

Indication : si $f \in F^\perp$, considérez la fonction $t \mapsto tf(t)$

****16)** Soit E un espace euclidien, p un projecteur. On sait d'après le cours que si p est un projecteur orthogonal, alors pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Montrez que la réciproque est vraie, en utilisant le vecteur $y + \lambda x$, où $x \in \text{Im } p$, $y \in \text{Ker } p$ et λ un réel.

****17)** Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f et f^* sont deux projecteurs qui commutent.

a) Démontrer que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale.

b) Démontrer que $\text{Ker}(f \circ f^*) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$. En déduire que $\text{Ker}(f \circ f^*) = \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f \circ f^*) = \text{Im}(f)$.

c) En déduire que $f = f^*$.

****18)** Soit E un espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base de E . On appelle S la matrice du produit scalaire dans la base \mathcal{B} (voir exercice 11).

Donnez la matrice de f^* dans la base \mathcal{B} en fonction de celle de f .

****19)** Soit E un espace euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée \mathcal{B} . Soit f l'endomorphisme de E dont

$$\text{la matrice (dans la base } \mathcal{B} \text{) est } A = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Donnez une base du noyau et de l'image de f . Vérifiez que ces deux sous-espaces de E sont supplémentaires orthogonaux.

b) Donnez une base orthonormée directe \mathcal{B}' de E dont les vecteurs sont choisis dans le noyau ou l'image de f (dans cet ordre).

c) Montrez que la matrice de f dans cette nouvelle base est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

d) Donnez une interprétation géométrique de l'application f .

***20)** Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications linéaires dont les matrices sont :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$$

****21)** Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe. Déterminez la matrice de la rotation d'axe orienté par u de coordonnées $(1, 1, -1)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

****22)** Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormée directe. Soit u un vecteur unitaire, θ un réel, et f la rotation d'axe orienté par u , d'angle θ .

Montrez que pour tout $x \in E$, $f(x) = (1 - \cos \theta) \cdot (x|u) \cdot u + \cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot u \wedge x$.

****23)** Déterminez $\text{card}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))$.

****24)** Soit E un espace euclidien et u un automorphisme orthogonal de E . On note $v = \text{Id}_E - u$.

a) Montrez que : $\text{Ker}(v) = (\text{Im } v)^\perp$.

b) Soit p la projection orthogonale sur $\text{Ker}(v)$. Montrez que :

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} p(x).$$

*****25)** Soit E un espace euclidien. On rappelle qu'une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

a) Soit x, y deux vecteurs différents tels que $\|x\| = \|y\| > 0$. Montrer qu'il existe une unique réflexion s telle que $y = s(x)$.

b) Montrer par récurrence sur $n = \dim E$ que toute isométrie vectorielle u de E est la composée d'au plus n réflexions. On pourra étudier le cas où u possède un point fixe non nul et dans l'autre cas, se ramener au cas précédent.

c) Améliorer le résultat précédent : si $r = \dim \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$, alors u est la composée d'au plus r réflexions.

***26)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = A$.

a) Montrez que s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = I_n$, alors $A^2 = I_n$. Que peut-on dire de mieux si k est impair ?

b) Montrez que si A est nilpotente, alors $A = 0$.

***27)** Soit $S = (s_{i,j})$ une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

$$\text{Montrez que } \sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

****28)** Soit $n \geq 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Justifiez que A est diagonalisable. Puis que A possède au plus trois valeurs propres distinctes, dont l'une est 0.

b) En notant λ et μ les deux autres valeurs propres (pas forcément distinctes), donnez deux équations reliant λ et μ , déduisez-en le spectre de A .

****29)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez que AA^T et $A^T A$ sont orthosembles.

****30)** Déterminez toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A \times A^T \times A = I_n.$$

****31)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt.$$

- a) Montrez que l'application $u: P \mapsto (1 - X^2) P'' - 2X P'$ est un endomorphisme auto-adjoint de E .
 b) Montrez que les valeurs propres de u sont négatives.

****32)** Soit E un espace euclidien, $u_1, u_2, \dots, u_p \in E$ et f l'application de E dans E tel que :

$$f: x \mapsto \sum_{k=1}^p \langle u_k, x \rangle u_k.$$

- a) Quelle est l'application f lorsque (u_1, \dots, u_p) est une famille orthonormée?
 b) Dans le cas général, montrez que f est un endomorphisme auto-adjoint positif de E .
 c) Déterminez $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

****33)** Rappel : une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dit **positive** quand : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrez l'équivalence des propriétés suivantes :

- (α) A est positive ;
 (β) toutes les valeurs propres de A sont positives ;
 (γ) il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = M^T M$;
 (δ) il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = S^2$.

Modifiez les propositions précédentes pour caractériser les matrices A définies-positives.

*****34) [Racine carrée dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$]**

a) Montrez que $r: \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une surjection.

$$M \mapsto M^2$$

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et M un antécédent de A par cette application. Montrez qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = P(A)$.

c) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit M, N deux antécédents de A par cette application r . Montrez que $(M - N)(M + N) = 0$ et que $M + N$ est inversible.

Déduisez-en que l'application r est une injection.

****35)** Soit f et g deux endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien. Montrez que $f \circ g$ est auto-adjoint si et seulement si f et g commutent.

****36)**

a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrez qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et des matrices colonnes U_1, \dots, U_n de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, U_i^T \times U_j = \delta_{i,j} \text{ et } S = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i U_i^T.$$

b) Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E . Montrez que u est combinaison linéaire de projections orthogonales sur des droites et que ces projections commutent entre elles.

****37)** Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 + 4I_n = 0$ et $M^T M = M M^T$. On note $S = M M^T$.

- a) Trouvez un polynôme annulateur de S de degré 2.
 b) Déduisez-en que $\frac{1}{2} M$ est orthogonale.
 c) Dans le cas $n = 2$, déterminez toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient les conditions de l'exercice.

****38)** Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, u un vecteur non nul de E . On pose f l'endomorphisme de E défini par $f(x) = u \wedge (u \wedge x)$.

Montrez que f est diagonalisable et diagonalisez-le.

****39)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$, a, b les plus petite et plus grande valeurs propres de S .

Montrez que toute valeur propre réelle de A est comprise entre a et b .

****40)** Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme f de E est *anti-adjoint* quand

$$\forall u, v \in E, \quad \langle f(u), v \rangle = -\langle u, f(v) \rangle.$$

Dans tout l'exercice, on suppose que f est un endomorphisme anti-adjoint de E .

- a) Montrez que : $\forall u \in E, \quad f(u) \perp u$.
- b) Montrez que la seule valeur propre possible de f est 0. L'endomorphisme f peut-il être diagonalisable ?
- c) Montrez que $f \circ f$ est un endomorphisme auto-adjoint de E et que ses valeurs propres sont négatives ou nulles.
- d) Soit x un vecteur propre de $f \circ f$ pour la valeur propre $-\lambda \neq 0$.
 - (i) Montrez que $P_x = \text{vect}(x, f(x))$ est un plan vectoriel stable par f .
 - (ii) Montrez qu'il existe une base orthonormée (a, b) de P_x où la matrice de l'endomorphisme induit f_{P_x} est de la forme

$$R_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix},$$

où μ est un réel strictement positif que l'on précisera.

- e) Montrez qu'il existe une base orthonormée de E où la matrice de f est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme R_μ d'abord puis des blocs (0) de taille 1×1 .

*****41) [Décomposition polaire]**

Montrez que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(Q, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = QS$.

*****42)** Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie.

- a) Montrer que la sphère-unité n'est pas compacte.
- b) Soit K une partie de E , non vide et bornée, telle que sa frontière soit compacte. Montrer que l'intérieur de K est vide.
- c) Et si on remplace « préhilbertien » par « normé » ?

Oraux de concours

1) CCINP

- a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^n dt$ (distinguer les cas n pair et n impair ; on donne de plus $I_0 = 1$).
- b) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- c) Calculez la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

2) CCINP

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose pour $(f, g) \in E^2 : \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)t^2 dt$.

- a) Montrez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
- b) Calculez $\int_0^1 t^n \ln(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) Soit $F = \{x \mapsto ax + b / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $u \in E$ telle que $u(x) = x \ln x$ pour tout $x \in]0, 1]$.
Déterminer le projeté orthogonal de u sur F .
- d) Déterminer $\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (at + b - t \ln t)^2 t^2 dt$.

3) CCINP

Soit $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$. On pose pour $(f, g) \in E^2 : \langle f, g \rangle = \int_0^1 (fg + f'g')$.

On considère les sous-ensembles $V = \{f \in E / f'' = f\}$, $G = \{f \in E / f(0) = f(1) = 0\}$ et $H = \{f \in E / f(0) = \text{ch } 1, f(1) = 1\}$.

- a) Montrez que la famille (ch, sh) est une base de V .
- b) Soient $f \in V$ et $g \in E$. Montrer que $\langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$. Calculez $\langle \text{ch}, \text{sh} \rangle$, $\|\text{ch}\|^2$ et $\|\text{sh}\|^2$.
- c) Soient $f \in V$ et $g \in G$. Montrer que $\langle f, g \rangle = 0$.
- d) Soit $f \in H$. Calculer $\langle f, \text{ch} \rangle$ et $\langle f, \text{sh} \rangle$. En déduire le projeté orthogonal de f sur V .
- e) Calculer $\inf_{f \in H} \int_0^1 (f^2 + f'^2)$.

4) CCINP

Soit E un espace euclidien et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E . Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E .

- a) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$.
- b) En déduire que si $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 < 1$, alors la famille $(e_i + u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E .

5) CCINP

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . On note D la droite engendrée par le vecteur $u = \sum_{k=1}^n k e_k$.

- a) Donner la matrice dans la base \mathcal{B} du projecteur orthogonal sur D , noté p .
- b) Donner le polynôme caractéristique et le spectre de p .
- c) Calculer la distance de $v = \sum_{k=1}^n e_k$ à D .

6) CCINP

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice définie-positive et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ une matrice de rang m .

- a) Montrer que $n \geq m$.
- b) Montrer que $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

7) IMT

Soit E un espace euclidien, f un endomorphisme auto-adjoint défini-positif de E .

- a) Montrer que $(x, y) \mapsto \langle f(x), y \rangle$ est un produit scalaire sur E .
- b) Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint défini-positif g tel que $g^2 = f$.

8) IMT

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^T = A^T A$ et $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $A = 0$.

- 9) **CCINP** Soit A et B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \frac{1}{3}(2A + B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- Calculer $AB^T + BA^T$ en calculant MM^T .
 - Montrer que $A = B$.
- 10) **CCINP** Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
- Calculer $M^T M$, en déduire que M est inversible.
 - Montrer que $M^{-1}M^T$ est une matrice orthogonale.
- 11) **CCINP** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_n$, $M^3 = I_n$ et $MM^T = M^T M$.
- Montrer que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
 - Dans le cas où $n = 3$, déterminer les matrices M vérifiant les conditions de l'énoncé.
- 12) **CCMP**
- Montrez que $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$.
 - Est-ce que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel?
 - Soit \mathcal{N} un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué de matrices nilpotentes. Montrez que $\dim \mathcal{N} \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
 - Peut-on avoir $\dim \mathcal{N} = \frac{n(n-1)}{2}$?
- 13) **CEN** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice normale quand $AA^T = A^T A$.
- Déterminer les matrices normales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Montrer que toute matrice normale stabilise un sous-espace de dimension 1 ou 2.
 - Montrer si A est normale, alors il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P$ soit diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant soit un bloc (a) , soit un bloc $\begin{pmatrix} a & c \\ -c & b \end{pmatrix}$.
- 14) **CEN** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On munit \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p de leurs produits scalaires canoniques.
- Montrer que $\text{Ker } A = \text{Ker } A^T A$. En déduire que $\text{rg } A = \text{rg } A^T A$ (noté r dans la suite).
 - Montrer qu'il existe une famille orthonormée de \mathbb{R}^p (y_1, \dots, y_r) telle que la matrice Y de colonnes y_1, \dots, y_r vérifie $Y^T A^T A Y = D$, où D est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.
 - Montrer qu'il existe U, V orthogonales et Δ diagonale telles que $A = U \Delta V$.
- 15) **CCMP** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,i} > 0$ et $a_{i,j}^2 \leq a_{i,i} a_{j,j}$.
 - Montrer que $\max_{i,j} |a_{i,j}| = \max_k a_{k,k}$.
- 16) **CCMP**
- Montrer que si A, B sont dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $\text{tr}(AB) \geq 0$.
 - Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \text{tr}(MS) \geq 0$.
- 17) **CCMP** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \geq 2$ tels que $A^k = A^T$.
- Montrer que $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$ sont supplémentaires orthogonaux dans \mathbb{R}^n .
 - Montrer que $B = A^{k+1}$ est une matrice de projecteur orthogonal.
 - Montrer que A induit une isométrie sur $\text{Im } A$.
 - En déduire A .
- 18) **CCMP** Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que le spectre complexe de A est inclus dans $i\mathbb{R}$.
 - Montrer qu'il existe $S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S'^2 = S$.
 - Montrer que $\det(S) \leq \det(S + A)$.
- 19) **ENS** Dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on définit une relation d'ordre : $A \leq B \iff B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- Montrer que si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et A définie-positive, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = P^T P$ et $B = P^T D P$.
 - Montrer que $A \mapsto A^{-1}$ est décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - L'application $A \mapsto A^2$ est-elle croissante sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?