

Espaces préhilbertiens réels

Dans tout ce chapitre, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel.

1 Généralités

1.1 Produit scalaire

Définition. On appelle produit scalaire sur E toute application φ de $E \times E$ dans \mathbb{R} qui est

- bilinéaire (linéaire par rapport à chacune de ses deux variables vectorielles) ;
- symétrique : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- définie-positive : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$ et $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Remarque. Pour montrer que φ est un produit scalaire, on montre en général d'abord que φ est symétrique, puis qu'elle est linéaire à gauche, la linéarité à droite découlant alors de la symétrie.

Définition. Quand E est muni d'un produit scalaire, on dit que E est un espace préhilbertien. Quand de plus E est de dimension finie, on dit que E est un espace euclidien.
En général, on note $\langle x, y \rangle$ ou $(x|y)$ les produits scalaires.

1.2 Exemples fondamentaux

- Le produit scalaire de la géométrie vérifie toutes ces propriétés.
- Si $E = \mathbb{R}^n$, soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$: φ est appelé le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .
- Plus généralement, si E est un \mathbb{R} -e.v. de dimension n , alors à toute base \mathcal{B} de E , on peut associer un produit scalaire :

si x et y sont deux vecteurs de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, on pose $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

L'expression matricielle du produit scalaire est alors $\varphi(x, y) = X^T \cdot Y$.

- Si a, b sont deux réels tels que $a < b$, $I = [a, b]$ et $E = C^0(I, \mathbb{R})$, alors pour f et g deux éléments de E , on pose $\varphi(f, g) = \int_a^b f g$: φ est un produit scalaire sur E .
- Si I est un intervalle, on note $L^2(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de carrés intégrables sur I .
Si $E = C^0(I, \mathbb{R}) \cap L^2(I, \mathbb{R})$, alors pour f et g deux éléments de E , on pose $\varphi(f, g) = \int_I f \cdot g$: φ est un produit scalaire sur E .
- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T \cdot B)$ est un produit scalaire, c'est même le produit scalaire canonique.

Remarque. Ne pas confondre le produit scalaire $X^T \cdot Y$ sur les **matrices-colonnes** et le produit scalaire $\text{tr}(A^T \cdot B)$ sur les **matrices carrées**.

Exercices :

- 1) Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t) dt$. Montrez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
- 2) Dans $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g \cdot \omega$, où $\omega \in E$. Donnez des conditions suffisantes sur ω pour qu'on obtienne un produit scalaire sur E .
- 3) Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$. Montrez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire. Pour $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, calculez $\langle X^k, X^\ell \rangle$.

1.3 Norme euclidienne

Définition. Soit E un espace préhilbertien, on note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire sur E .

On appelle norme euclidienne associée au produit scalaire l'application de E dans \mathbb{R}_+ définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Remarque. Cette définition a bien un sens, car d'après les propriétés d'un produit scalaire, pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ donc $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ existe.

On vérifie alors les résultats suivants, inspirés par la géométrie habituelle dans un triangle ou un parallélogramme.

Proposition 1.

- ▷ pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ (égalité d'Al-Kashi)
- ▷ pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$ (égalité d'Al-Kashi)
- ▷ pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (identité du parallélogramme)
- ▷ pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$ (identité de polarisation)

Et encore

Proposition 2. Avec les mêmes notations,

- ▷ pour tout $(x, y) \in E^2$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)
- ▷ pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
- ▷ pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- ▷ pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Remarque. Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si x et y sont colinéaires.

Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens.

On dit qu'un vecteur de E est unitaire (ou normalisé) si sa norme vaut 1. À tout vecteur x non nul, on associe deux vecteurs unitaires : $\frac{x}{\|x\|}$ et $-\frac{x}{\|x\|}$.

Exercices :

- 4) Soit $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, donnez une inégalité liant $\sum_{k=1}^n a_k b_k$, $\sum_{k=1}^n a_k^2$ et $\sum_{k=1}^n b_k^2$.

Application : montrez que $\sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{k}}{2^k} \leq \frac{1}{\sqrt{6}}(n+1)$, $\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq (n+1)\sqrt{2^n}$.

- 5) Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ une fonction à valeurs strictement positives. Montrez que :

$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f} \right)$$

Pour quelles fonctions y-a-t-il égalité ?

1.4 Vecteurs orthogonaux

Définition. Soit E un espace préhilbertien, on note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire.

On dit que deux vecteurs x, y sont orthogonaux (sous-entendu : pour ce produit scalaire) quand $\langle x, y \rangle = 0$.

On peut alors noter $x \perp y$ pour signifier que x et y sont orthogonaux.

Plus généralement, si x_1, \dots, x_n sont n vecteurs de E , on dit que la famille (x_1, \dots, x_n) est une famille orthogonale quand pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.

On retrouve alors le célèbre théorème de Pythagore.

Proposition 3. Avec les mêmes notations, $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Exercices :

- 6) Soit E un \mathbb{R} -e.v. de dimension au moins 2 et u, v deux vecteurs non colinéaires. Montrez qu'il existe un produit scalaire sur E pour lequel u et v sont orthogonaux.

2 Bases orthonormées

2.1 Familles orthonormées

Définition. Soit E un espace préhilbertien. Une famille de vecteurs est dite orthonormée (ou orthonormale) quand elle est orthogonale et ces vecteurs sont unitaires.

Proposition 4. Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Une famille orthonormée génératrice de E est donc une base orthonormée de E .

Exercices :

- 7) Généralisez l'exercice précédent.

2.2 Existence de bases orthonormées

Théorème 1. Soit E un espace euclidien. Il existe dans E des bases orthonormées.

De plus, pour toute base (v_1, \dots, v_n) de E , il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{vect}(e_1, \dots, e_k)$.

La démonstration repose sur l'algorithme d'orthogonalisation/orthonormalisation de Schmidt.

On en déduit le théorème de la base orthonormée incomplète.

Théorème 2. Soit E un espace euclidien. Toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée de E .

Exercices :

- 8) Dans $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\varphi(f, g) = \int_0^1 fg$, orthogonalisez la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$.
- 9) Dans \mathbb{R}^5 , muni du produit scalaire canonique, on pose $u = (1, 2, 3, 4, 5)$. Complétez la famille (u) en une base orthonormée de \mathbb{R}^5 .
- 10) Soit E un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. Montrez qu'il existe une base orthonormée de trigonalisation de f .

2.3 Calculs en base orthonormée

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Soit x, y deux vecteurs de E , de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

Alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^\top \cdot Y$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{X^\top \cdot X}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_i = \langle x, e_i \rangle$$

3 Sous-espaces orthogonaux

3.1 Orthogonalité de deux s.e.v.

Définition. Soit E un espace préhilbertien. Soit F, G deux s.e.v. de E .

Soit u un vecteur de E . On dit que u est orthogonal à F (ou normal à F) quand u est orthogonal à tous les vecteurs de F .

On dit que F et G sont orthogonaux quand tout vecteur de F et tout vecteur de G sont orthogonaux, autrement dit quand pour tout $(x, y) \in F \times G$, $\langle x, y \rangle = 0$.

Proposition 5. Si F est de dimension finie et a pour famille génératrice (v_1, \dots, v_k) , alors u est orthogonal à F si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\langle u, v_i \rangle = 0$.

Exercices :

11) Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$, on pose

$$F = \{P(X^2) \mid P \in \mathbb{R}[X]\} \text{ et } G = \{XP(X^2) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Justifiez que F et G sont deux s.e.v. orthogonaux.

12) Dans $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, espace des fonctions continues 2π -périodiques muni du produit scalaire $\int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$, montrez que les deux s.e.v. engendrés par les familles $(x \mapsto \sin(kx))_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(x \mapsto \cos(kx))_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont orthogonaux.

Proposition 6. Si F et G sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe : $F \cap G = \{0\}$.

Si F_1, \dots, F_k sont k s.e.v. deux à deux orthogonaux, alors ils sont en somme directe.

Dans ce cas, on note la somme directe avec le symbole $\bigoplus_{1 \leq i \leq k}^\perp F_i$: on dit qu'il s'agit d'une somme directe orthogonale.

3.2 Orthogonal d'un s.e.v.

Définition.

Si F est un s.e.v. de E , espace préhilbertien, on note F^\perp l'ensemble des vecteurs normaux à F :

$$F^\perp = \{v \in E \mid \forall x \in F \quad \langle v, x \rangle = 0\}$$

Avec cette notation, on a clairement l'équivalence :

F et G sont deux s.e.v. orthogonaux si et seulement si $F \subset G^\perp$, ou ce qui revient au même $G \subset F^\perp$

Théorème 3. Soit E un espace préhilbertien et F un s.e.v. de E .

Alors F^\perp est un s.e.v. de E , orthogonal à F et donc en somme directe avec F .

Proposition 7. Soit E un espace préhilbertien et F un s.e.v. de E .

Alors $F \subset F^{\perp\perp}$.

Remarque. En général, F^\perp n'est pas supplémentaire à F et F n'est pas égal à $F^{\perp\perp}$.

Remarque. Dans le cas où F est une droite vectorielle dirigée par un vecteur u , on note plutôt $G = u^\perp$ l'orthogonal de F : dans ce cas, u^\perp est un hyperplan et on dit alors que u est un vecteur normal à G .

4 Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension finie

4.1 Projection orthogonale

Proposition 8. Soit E un espace préhilbertien, F un s.e.v. de E de dimension finie. Alors F^\perp est un supplémentaire de F , appelé le supplémentaire orthogonal de F .

Définition. Avec ces notations, le projecteur sur F parallèlement à F^\perp est appelé le projecteur orthogonal sur F .

La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F , parallèlement à F^\perp .

Si on connaît une base orthonormée de F , (e_1, \dots, e_p) , alors il est facile de calculer la projection orthogonale de x sur F :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$$

Les projecteurs orthogonaux vérifient quelques propriétés remarquables.

Proposition 9. Soit E un espace préhilbertien, F un s.e.v. de E de dimension finie..

Si p est le projecteur orthogonal sur F , alors

- pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$
- pour tout $x \in E$, $\langle p(x), x \rangle = \|p(x)\|^2$
- pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$.

4.2 Distance à un s.e.v.

On rappelle la définition de distance d'un point à une partie d'un e.v.n. :

soit $a \in E$ et A une partie non vide de E , on pose $d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\} = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

En général, cette distance n'est pas atteinte ($\inf \neq \min$).

Proposition 10. Soit E un espace préhilbertien, F un s.e.v. de E de dimension finie et x un vecteur de E .

Soit y la projection orthogonale de x sur F . Alors pour tout $z \in F$, $\|x - y\| \leq \|x - z\|$, avec égalité si et seulement si $z = y$.

Autrement dit, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F qui minimise la distance entre x et un point de F .

$\|x - y\|$ est alors la distance de x à F , c'est le minimum des distances entre x et un élément de F :

$$d(x, F) = \min_{z \in F} \|x - z\| = \|x - p_F(x)\|$$

Remarque. Tout ce qui précède est bien sûr valable si E est de dimension finie.

Dans ce cas, pour tout s.e.v. de F , F^\perp est un supplémentaire de F dans E .

Par conséquent, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.