

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

I. D'après E3A 2019

Pour $P \in E$, on pose $u(P) = \int_0^1 (X+t)^n P(t) dt$.

Q 1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Q 2. Montrer que $u \in GL(E)$.

Q 3.

a) Montrer que pour tout $(p, q) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $\langle u(X^p), X^q \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{(k+q+1)(n+p+1-k)}$.

b) Montrer que u est auto-adjoint.

On sait alors qu'il existe une base orthonormée (P_0, \dots, P_n) de vecteurs propres de u , associés aux valeurs propres $\lambda_0, \dots, \lambda_n$.

Q 4. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x)P_k(y)$. Indication : décomposer le polynôme $Q_y = (X+y)^n$ dans la base (P_0, \dots, P_n) .

Q 5. Calculer $\text{tr}(u)$.

Q 6.

a) Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que $u(Q_y)(y) = \frac{1}{2n+1} [(y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}]$.

b) Déterminer $\text{tr}(u^2)$. Indication : calculer $\int_0^1 u(Q_y)(y) dy$.

II. D'après E3A 2020

Q 7. Quelle est la dimension de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$?

Soit L un élément non nul de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

Q 8. Montrer que $\deg L = n$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose quand c'est possible $\varphi(x) = \int_0^1 L(t)t^x dt$.

Q 9. Justifier que φ est définie sur $] -1, +\infty[$ et que φ est une fraction rationnelle.

Q 10.

a) Montrer que les nombres $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ sont racines de φ .

b) Montrer que $\varphi = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes tels que $\deg P \leq n$ et $\deg Q = n+1$.

c) En déduire une factorisation de P , puis les racines et les pôles de φ , ainsi que leurs ordres de multiplicité.

Q 11. En décomposant en éléments simples φ , donner une base de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ dont les éléments ont pour coefficient dominant 1 et dont les autres coefficients s'écrivent à l'aide des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ et $\binom{2n}{n+k}$.

Problème 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles.

Dans tout l'exercice, E est l'espace vectoriel euclidien usuel \mathbb{R}^n dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

Q 1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

- a) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$
- b) $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \lambda \geq 0$
- c) $\exists B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

On dit dans ce cas que la matrice A est symétrique positive et on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Q 2. Soient J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et α un réel. On pose $M = -J + (\alpha + 1)I_n$ où I_n est la matrice de l'endomorphisme identité de E .

- a) Déterminer les éléments propres de J . En déduire ceux de M .
- b) Pour quelles valeurs de α a-t-on $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$? Montrer qu'alors $\text{rg}(M) \geq n - 1$.

Q 3. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{C} est A .

- a) Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme a .

On notera pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, λ_i la valeur propre associée au vecteur propre u_i .

- b) Soit b l'endomorphisme de E défini par : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, b(u_i) = \sqrt{\lambda_i} u_i$.

Justifier que b est un endomorphisme symétrique.

- c) Démontrer que : $\text{Ker}(a) = \text{Ker}(b)$.

Q 4. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (i \neq j \implies a_{i,j} < 0)$.

a est toujours l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{C} est A et b l'endomorphisme de E tel que défini à la question 3.2.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $z_i = b(e_i)$.

On va montrer que la famille (z_1, \dots, z_{n-1}) est libre.

Dans ce but, on considère des scalaires $(\gamma_i)_{i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ tels que $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0$.

- a) Montrer que l'on a aussi : $\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i = 0$: on pourra introduire les ensembles $I = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \gamma_i \geq 0\}$ et

$J = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \gamma_i < 0\}$ et montrer que $\sum_{i \in I} \gamma_i z_i = 0$.

- b) En utilisant le produit scalaire $\left\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n \right\rangle$, conclure.

Prouver que : $\text{rg}(A) \geq n - 1$.