

## Notations

Pour ce problème, on désigne par  $n$  un entier naturel non nul.

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / A^T = A\}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formé des matrices symétriques.

— Un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  est noté  $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  en identifiant les matrices-colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  avec les éléments

de  $\mathbb{R}^n$ .

— Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est notée  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  où  $a_{i,j}$  est le coefficient de  $A$  situé en ligne  $j$  et colonne  $i$ .

—  $\text{Sp}(A)$  est le spectre de  $A$ , ensemble des valeurs propres de  $A$ .

— L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est muni du produit scalaire canonique défini par  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $\langle x, y \rangle = x^T \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$

et  $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  est la norme euclidienne associée.

— La sphère unité de  $\mathbb{R}^n$  est  $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$ .

À toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on associe la fonction  $q_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q_A(x) = \langle Ax, x \rangle.$$

## I. Une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

**Q 1.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

a) Montrez que la fonction  $q_A$  est bornée et atteint ses bornes sur la sphère unité  $\Omega_n$ . On note alors :

$$m_A = \min_{x \in \Omega_n} (q_A(x)) \text{ et } M_A = \max_{x \in \Omega_n} (q_A(x)).$$

b) Démontrer que toute valeur propre réelle de  $A$  se trouve dans l'intervalle  $[m_A, M_A]$ .

c) Expliciter  $\text{Sp}(A)$ ,  $m_A$  et  $M_A$  pour la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Q 2.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $q_A(x) = 0$  pour tout  $x \in \Omega_n$ .

a) Montrer que  $q_A(y) = 0$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ .

b) Si  $(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , exprimer  $q_A(y + z)$  (qui est nul d'après la question a) en fonction de  $\langle Ay, z \rangle$  et  $\langle Az, y \rangle$ .

c) Montrer que la matrice  $A$  est anti-symétrique (c'est à dire que  $A^T = -A$ ).

**Q 3.** Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$[\forall x \in \Omega_n, \quad q_A(x) = 0] \iff A = 0_n.$$

**Q 4.** Montrer que l'application  $N: \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)|$$

est une norme.

**Q 5.** On considère  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

a) Justifier qu'il existe  $n$  nombres réels

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

et une base orthonormée  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u(e_k) = A e_k = \lambda_k e_k.$$

b) Préciser  $q_A(e_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

c) Soit  $x = \sum_{k=1}^n x'_k e_k \in \Omega_n$ . Exprimer  $q_A(x)$  en fonction des valeurs propres  $\lambda_k$  de  $A$  et des composantes  $x'_k$  de  $x$ .

d) Redémontrer le résultat de la question 1 : la fonction  $q_A$  possède un minimum  $m_A$  et un maximum  $M_A$  sur la sphère unité  $\Omega_n$ . Expliciter  $m_A$  et  $M_A$  en fonction des valeurs propres de  $A$ .

e) Montrer que :

$$N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|.$$

Établir une inégalité entre  $|\det(A)|$  et  $(N(A))^n$ .

f) **Exemple** : si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$ , calculer  $\det(A)$  et  $N(A)$ .

Dans toute la suite du problème, pour tout entier  $n \geq 2$ , on désigne par  $H_n$  la matrice de Hilbert d'ordre  $n$  définie par

$$H_n = \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & \dots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

ou encore  $H_n = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  avec  $a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$ .

Pour simplifier, on notera  $q_n$  la fonction  $q_{H_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q_n(x) = q_{H_n}(x) = \langle H_n x, x \rangle$ .

## II. Sur les valeurs propres de $H_n$

**Q 6.** Soit  $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$ .

a) Montrer que :

$$q_n(x) = \langle H_n x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{i+j-1} \right) x_i = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{x_i x_j}{i+j-1}.$$

b) Développer :  $\left( \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right) \left( \sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right)$  où  $t$  est une variable réelle.

c) Montrer que :  $q_n(x) = \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right)^2 dt$ .

d) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q_n(x) \geq 0$  et que  $q_n(x) = 0$  équivaut à  $x = 0$ .

Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de  $H_n$  ?

**Q 7.**

a) Soit  $P(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$  un polynôme à coefficients complexes. Montrer que :  $\int_{-1}^1 P(t) dt = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$ .

On pourra expliciter  $\int_{-1}^1 t^k dt$  et  $-i \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta$ .

b) En gardant les notations introduites dans la question 6 et en notant :  $Q(t) = \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}$ , montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$0 \leq q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t) dt \leq \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta,$$

avec inégalités strictes si  $x \neq 0$ .

**Q 8.** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq q_n(x) \leq \pi \|x\|^2,$$

les inégalités étant strictes pour  $x \neq 0$ .

**Q 9.** Pour tout entier  $n \geq 2$ , on note

$$\mu_n = \min(\text{Sp}(H_n)) \text{ et } \rho_n = \max(\text{Sp}(H_n)).$$

a) Expliciter  $\mu_2$  et  $\rho_2$ . Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , on a :

$$0 < \mu_n < \rho_n < \pi.$$

b) Montrer que  $q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n]$ .

c) Calculer  $\langle H_n \varepsilon_n, \varepsilon_n \rangle$  où  $\varepsilon_n$  désigne le dernier vecteur de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  :  $\varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . En déduire la limite de  $\mu_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

### III. Sur le déterminant de $H_n$ .

$H_n$  désigne toujours la matrice de Hilbert d'ordre  $n$ , pour  $n \geq 2$ .

#### Q 10. Une fraction rationnelle

On considère la fraction rationnelle :

$$R_n(x) = \frac{\prod_{k=1}^n (x-k)}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

On admettra qu'il existe des réels  $\lambda_{0,n}, \lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{n,n}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, -1, \dots, -n\}, \quad R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_{k,n}}{x+k},$$

cette décomposition (en éléments simples) de  $R_n$  étant unique.

Exprimer le coefficient  $\lambda_{n,n}$  de  $\frac{1}{x+n}$  à l'aide de  $(2n)!$  et de  $n!$ .

#### Q 11. Matrice $A_n$

Pour  $n \geq 2$ , on considère la matrice  $A_n$  définie par  $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  avec :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{j+i-1} & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq n, \\ R_{n-1}(j) & \text{pour } i = n, \quad 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

où les  $R_p$  ont été définis plus haut.

a) Montrer que pour  $1 \leq i \leq n$ , on a :

$$R_{n-1}(i) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j-1, n-1} h_{i,j}$$

puis en déduire que  $\det(A_n) = \binom{2(n-1)}{n-1} \det(H_n)$ .

*Remarque :  $h_{i,j}$  désigne ici le coefficient générique de la matrice  $H_n$ , c'est à dire celui à l'intersection des ligne  $i$  et colonne  $j$ .*

b) Montrer que :

$$\det(A_n) = \frac{\det(H_{n-1})}{(2n-1) \binom{2(n-1)}{n-1}}.$$

En déduire l'expression de  $\det(H_n)$  en fonction de  $\det(H_{n-1})$ .

c) Montrer que pour tout  $n \geq 2$  :

$$\det(H_n) \neq 0, \text{ puis que } \frac{1}{\det(H_n)} \in \mathbb{N}^*.$$

#### Q 12. Calcul de $\det(H_n)$

En notant, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\Phi_n = \prod_{k=1}^n k!$ ,

montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad \det(H_n) = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}.$$