FONCTIONS DE $\mathbb{R}$ DANS $\mathbb{R}$, LIMITES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

****1)** Déterminez les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont périodiques et qui ont une limite finie en $+\infty$ (on pourra considérer les suites $(f(x+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ où T est une période strictement positive de f).

****2)** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(2x)=f(x)$.

a) Soit $u\in\mathbb{R}$. Montrez que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(u)=f\left(\dfrac{u}{2^n}\right)$.

b) Montrez que f est constante.

****3)** Soit f une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifie :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \text{ et pour tout } (u,v)\in\mathbb{R}_+^{*2},\ f\Big(u.f(v)\Big)=v.f(u).$$

Soit $x>0$, on pose $a=xf(x)$.

a) Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$. Montrez que si $f(t)=t$, alors $f(t^2)=t^2$.

b) Montrez que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f\left(a^{2^n}\right)=a^{2^n}$. Montrez par l'absurde que $a\leqslant 1$.

c) Montrez que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f\left(a^{-2^n}\right)=f(1).a^{-2^n}$. Déduisez-en que $a\geqslant 1$.

d) Concluez : reconnaissez l'application f.

****4)** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(2x)=f(x)\cos x$.

a) Montrez que pour tout $(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$, $f(x)=f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}$.

b) Pour $(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$, donnez une expression simple de $\sin\dfrac{x}{2^n}.\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}$.

c) Déterminez la fonction f.

****5)** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x^2)=f(x)$. Montrez que f est constante.

****6)** Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$. Déterminez les fonctions f continues en 0 qui vérifient $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(ax)+f(bx)=0$.

****7)** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|f(x)-f(y)|\leqslant|\sin x-\sin y|$.

a) Montrez que f est 2π-périodique.

b) Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrez que f est dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$ et que $f'(\pi/2)=0$.

****8)**

a) Déterminez les fonctions f continues en 0 telles que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

b) Faites de même avec les fonctions telles que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+y)=f(x)f(y)$.

****9)** Justifiez que les propositions suivantes sont fausses.

a) Toute fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ est croissante au voisinage de $+\infty$.

b) Si f est une fonction telle que $|f(x)|\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, alors f a une limite infinie en $+\infty$.

c) Toute fonction définie sur un intervalle est monotone au voisinage de tout point.

****10)** Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur $b\in\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$. On pose $A=\{x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)=b\}$.

a) Montrez que A possède une borne supérieure s.

b) Montrez qu'en fait s est le maximum de A.

*****11)** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad\exists\alpha>0\quad\forall t\in[x,x+\alpha]\quad f(x)\leqslant f(t)$. Montrez que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

*****12)** Soit f définie au voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=0$.

Montrez que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

*****13)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x+1) - f(x) = 0$.

Montrez que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Généralisez : si $\lim_{x \to +\infty} f(x+1) - f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.