

Partie II

1) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels vérifiant les conditions

$$(H) \begin{cases} (H_1) a_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \\ (H_2) \text{ la série entière } \sum a_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } 1 \\ (H_3) \text{ la série } \sum a_n \text{ est divergente} \end{cases}$$

On désigne par f la somme de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$.

a) Soit $A > 0$. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{n=1}^{N_1} a_n \geq 2A$.

b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $0 \leq 1 - x \leq \alpha$ entraîne $\sum_{n=1}^{N_1} a_n x^n \geq A$.

c) En déduire que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$.

2) Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lambda \in \mathbb{R}$.

a) On suppose $\lambda \neq 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$? Que peut-on dire de ce rayon de convergence lorsque $\lambda = 0$?

b) Soit g la somme de la série entière $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$. On pose $\lambda_n = \frac{b_n}{a_n}$. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\frac{g(x)}{f(x)} - \lambda = \frac{1}{f(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n - \lambda) a_n x^n.$$

Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $|\lambda_n - \lambda| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geq N_2$, $|\lambda_n - \lambda| \leq \varepsilon$. En déduire que pour $x \in]0, 1[$, $\sum_{n=N_2+1}^{+\infty} |\lambda_n - \lambda| a_n x^n \leq \varepsilon f(x)$

d) Montrer que, pour $x \in]0, 1[$,

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} - \lambda \right| \leq \varepsilon + \frac{M}{f(x)} \sum_{n=1}^{N_2} a_n x^n.$$

En déduire que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{g(x)}{f(x)} = \lambda$.

Partie IV

1) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels vérifiant les conditions :

$$(H') \begin{cases} (H'_1) a_1 > 0 \text{ et } a_n \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \\ (H'_2) \text{ la série entière } \sum a_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } 1 \\ (H'_3) \text{ la série } \sum a_n \text{ est divergente} \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les conditions (H_1) et (H_3) de la partie II.

Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum A_n x^n$ est au plus égal à 1.

b) Soit $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$. En remarquant que $r^k \geq r^n$ pour $1 \leq k \leq n$, montrer que la suite $(A_n r^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.

En déduire que (A_n) vérifie toutes les conditions (H) de la partie II.

c) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(1-x) \sum_{k=1}^n A_k x^k = \sum_{k=1}^n a_k x^k - A_n x^{n+1}.$$

En déduire une relation entre $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n$.

2) Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Posons $C_n = \sum_{k=1}^n c_k$. On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_n}{A_n} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que pour $x \in]-1, 1[$, la série $\sum C_n x^n$ est convergente.

b) En déduire que la série $\sum c_n x^n$ est convergente pour $x \in]-1, 1[$ et établir une relation entre $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} C_n x^n$.

c) Montrer alors que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n}{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n} = \lambda$.

3) On définit les deux suites de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \\ c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est de la forme } 2^k, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Si $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, montrer que $A_n \sim \ln n$.

b) Montrer que si $C_n = \sum_{k=1}^n c_k$, $\frac{\ln n}{\ln 2} \leq C_n \leq \frac{\ln n}{\ln 2} + 1$

c) Déduire de ce qui précède un équivalent quand x tend vers 1 de la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2^k}$.