Problème 1 - Mines-Ponts 2013 PC

On dit qu'une fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifie l'hypothèse **H1** quand elle possède un développement en série entière de rayon de convergence au moins égal à 1.

I.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière (z et les a_n sont des complexes). On pose $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Dans toute cette partie, on suppose que h vérifie l'hypothèse **H1**.

Soit $r \in [0, 1[$.

Q 1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer les coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} h(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad c'_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \overline{h(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

en fonction de r et des nombres a_k.

Q 2. En fonction du signe de $n \in \mathbb{Z}$, déterminer des expressions de $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{Re}\left(h(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta$

On suppose en outre que h vérifie l'hypothèse **H2** : a_0 est un réel positif ou nul.

Q 3. Montrez que $a_0 = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{Re}\left(h(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right)\mathrm{d}\theta$.

On pose $a_n = |a_n|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n}$ et on choisit $\tau \in [0, 1[$.

Q 4. Montrer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\tau^n r^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{Re}\left(h(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \tau^n\cos(n\theta + \varphi_n)\right)\mathrm{d}\theta$$

On choisit maintenant $\tau \in [0, 1/3]$.

Q 5. Déterminez le signe de $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \tau^n\cos(n\theta + \varphi_n)$. Montrer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\tau^n r^n \leqslant \max_{-\pi\leqslant\theta\leqslant+\pi} \left|\mathfrak{Re}\left(h(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right)\right|$$

On dit que la fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifie l'hypothèse **H3** quand $\forall r \in [0, 1[\quad \displaystyle\max_{-\pi\leqslant\theta\leqslant+\pi} \left|\mathfrak{Re}\left(g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right)\right| \leqslant 1$.

Q 6. En admettant que h vérifie les hypothèses **H1**, **H2** et **H3**, montrer que $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\,|z|^n \leqslant 1$ dès que $|z| \leqslant 1/3$.

II. Rayon de Bohr

On considère maintenant une fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ qui vérifie l'hypothèse **H1** et aussi **H4** : $\forall |z| < 1 \quad |f(z)| \leqslant 1$.

Q 7. En utilisant la question 6, montrer

$$\forall |z| < 1/3 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|\,|z|^n \leqslant 1$$

La valeur $|z| = 1/3$ est appelé le rayon de Bohr de la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$.

On considère maintenant le cas particulier de la fonction $f_\lambda : z \mapsto \dfrac{z-\lambda}{1-\lambda z}$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Q 8. Sous quelles conditions relatives à λ la fonction f_λ vérifie-t-elle les hypothèses **H1** et **H4** ?

En admettant que ces conditions soient réalisées, on note $b_n(\lambda)$ les coefficients du développement en série entière de f_λ : $f_\lambda(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(\lambda) z^n$.

Q 9. Déterminer en fonction de λ les valeurs de $|z|$ pour lesquelles $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n(\lambda)|\,|z|^n \leqslant 1$.

Q 10. Démontrer que si $|z| \in \,]1/3, 1[$, alors il existe $\lambda \in \,]0, 1[$ telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n(\lambda)|\,|z|^n > 1$.

Q 11. En déduire que la constante $1/3$ obtenue en question 7 ne peut être améliorée sans autre hypothèse supplémentaire sur f.

III. Au delà de 1/3

Nous venons de démontrer que, sous les hypothèses **H1** et **H4** l'estimation est optimale. Dans ce paragraphe on établit une estimation plus générale, valable au-delà du rayon de Bohr $r = 1/3$.

Q 12. Montrer que si f et g vérifient **H1**, où $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ et $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, alors

$$\forall r \in \,]0,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \overline{c_n} r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\overline{g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\,\mathrm{d}\theta$$

On pose

$$|||f||| = \left(\sup_{0\leqslant r<1} \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^2 r^{2n}\right)^{1/2}$$

sous réserve que cette dernière quantité soit finie.

L'ensemble des fonctions de $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient **H1** et **H4** et, par souci de simplification, dont les coefficients du développement en série entière sont réels est noté $\mathscr{E}$.

On suppose désormais que $f \in \mathscr{E}$.

Q 13. En s'aidant de la question 12, montrer que $|||f||| \leqslant 1$.

On admettra que $|||f|||$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{E}$.

On note V_n l'espace vectoriel des fonctions de la variable complexe z de la forme $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$ où α et β appartiennent à $\mathbb{R}$.

On note, pour $n \geqslant 1$, P_n l'application qui à $g = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ vérifiant **H1** et dont les coefficients c_n sont réels, fait correspondre la fonction $g_n \in V_n$ définie par $g_n(z) = c_0 + c_n z^n$.

On note A_f l'application qui à $\psi \in V_n$ fait correspondre la fonction $f\psi$; on rappelle que le produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 est une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

Q 14. Démontrer que pour tout $\psi \in V_n$, $|||A_f(\psi)||| \leqslant |||\psi|||$ et en déduire que $|||P_n \circ A_f(\psi)||| \leqslant |||\psi|||$.

On note S la bijection de V_n dans $\mathbb{R}^2$ qui à ψ définie par $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$ associe le vecteur $\Psi = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

Q 15. Déterminez la matrice D de l'application linéaire qui à $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ associe $S \circ P_n \circ A_f(\psi)$ où $\psi = S^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \alpha + \beta z^n$.

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne : $\|\Psi\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, dérivant du produit scalaire $(\Psi|\Theta) = \alpha\gamma + \beta\delta$, où $\Psi = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ et $\Theta = \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$.

Q 16. Montrer que pour tout Ψ, et pour tout $\Theta \in R^2$, $(\Psi|D\Theta) = ({}^tD\Psi|\Theta)$.

On dit que la matrice B est positive si et seulement si $(B\Psi|\Psi) \geqslant 0$ pour tout $\Psi \in \mathbb{R}^2$. On note I la matrice identité.

Q 17. Déduire de la question 14 que $B = I - {}^tDD$ est positive. En déduire que $b_0^2 \leqslant 1$ et que les valeurs propres de B sont positives ou nulles.

Q 18. En déduire que $|b_n| \leqslant 1 - b_0^2$. On pourra s'aider du calcul du déterminant de B.

Pour $0 \leqslant r < 1$, on pose

$$M(r) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left(t + (1-t^2)\frac{r}{1-r} \right)$$

Q 19. Montrer

$$\forall |z| < 1 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|\,|z|^n \leqslant M(|z|)$$

Q 20. Déterminer $M(r)$ pour $r \in [0,1[$.

On pose

$$m(r) = \min(M(r), (1-r^2)^{-1/2})$$

Q 21. Montrer que

$$\forall \varepsilon \in]0,1[\ \forall [z| < 1-\varepsilon \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n z\,|z|^n \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 |1-\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \left(1 - \frac{|z|^2}{|1-\varepsilon|^2} \right)^{1/2}$$

En déduire à l'aide de la question 13 que

$$\forall |z| < 1 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|\,|z|^n \leqslant m(|z|)$$