

SÉRIES ENTIÈRES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

*1) Déterminez le rayon de convergence des séries entières suivantes (θ réel) :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{4^n} z^n & \text{b) } \sum_{n \geq 0} \sin(n\theta) z^n & \text{c) } \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) z^n & \text{d) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n} z^n \\ \text{e) } \sum_{n \geq 2} \operatorname{ch}(n\theta) z^{2n} & \text{f) } \sum_{n \geq 0} e^{\sqrt{n+1}} z^n & \text{g) } \sum_{n \geq 1} n^{\ln n} z^n & \text{h) } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\operatorname{ch}(n\theta)} z^n \\ \text{i) } \sum_{n \geq 0} \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^n & \text{j) } \sum_{n \geq 0} e^{\sin n} z^n & \text{k) } \sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^3}{(3n)!} z^{2n} & \text{l) } \sum_{n \geq 0} \frac{e^{in\theta}}{n!} z^{n!} \end{array}$$

*2) Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, α une constante. Donnez le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} a_n z^{2n} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n \quad \text{c) } \sum_{n \geq 0} n^\alpha a_n z^n$$

*3) Soit a une suite réelle décroissante, positive, qui converge vers 0 et telle que $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$?

**4) Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a > 0$ et $R_b > 0$.

Montrez que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n b_n z^n$ est au moins égal à $R_a R_b$ et donnez un exemple dans lequel il est strictement supérieur.

Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^2 z^n$?

**5) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n}$.

a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$?

b) On pose quand on le peut $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $x \in \mathbb{R}$. Quel est l'ensemble de définition de f ?

c) Donnez une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n . Déduisez-en que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

d) Donnez une expression explicite de $f(x)$.

e) Montrez : $\sqrt{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)4^n} \binom{2n}{n}$.

**6) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

a) Montrez que f est bien définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

b) Calculez $f + f' + f''$. Déduisez-en une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.

c) Déterminez une expression simplifiée de $f(x)$.

**7) Calculez les sommes suivantes en donnant à chaque fois l'ensemble de définition :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n & \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n & \text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1) 2^{n+1} x^n & \text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n} x^n \\ \text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} x^n & \text{f) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^n & \text{g) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n & \text{h) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(n\theta)}{n} x^n \\ \text{i) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} x^n & & & \end{array}$$

***8)** Montrez que $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} et donnez les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

****9)**

a) Déterminez le plus grand intervalle I tel que pour tout $x \in I$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} x^n$.

b) Déduisez-en le développement en série entière des fonctions arcsin et arccos.

****10)** Développez en série entière les fonctions suivantes, en donnant à chaque fois le rayon de convergence et le domaine de validité du développement, soit par calcul direct à l'aide de fonctions usuelles, soit d'abord par dérivation.

a) $x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$ b) $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ c) $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^3}$ d) $x \mapsto e^{-x} \sin x$

e) $x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$ f) $x \mapsto \ln \frac{2-x}{3-x^2}$ g) $x \mapsto \cos x \operatorname{ch} x$ h) $x \mapsto \frac{\sin(3x)}{\sin x}$

i) $x \mapsto \arctan \frac{1}{1+x}$ j) $x \mapsto \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2)$ k) $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

****11)**

a) Montrez que l'intégrale $I = \int_0^1 \ln t \ln(1-t) dt$ converge.

b) Justifiez que la fonction $t \mapsto \ln t \ln(1-t)$ est la somme d'une série de fonctions qui converge normalement sur $[0, 1]$.

c) Donnez la valeur de I . On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

****12)** Justifiez l'existence des intégrales suivantes et en vous inspirant de l'exercice précédent, montrez les égalités :

a) $\int_0^1 t^t dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$ b) $\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

c) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ d) $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

e) $\int_0^1 \frac{\ln(t^2) \ln(1-t^2)}{t^2} dt = \frac{\pi^2}{2} - 4 \ln 2$

****13)** Montrez les égalités suivantes :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^{n/2}} = \frac{\pi}{6}$ b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

****14)** On veut calculer $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n(2n-1)}$. Pour cela, on introduit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(2n-1)}$.

a) Donnez l'ensemble de définition D de f , l'intervalle ouvert de convergence I , puis pour $x \in I$, écrivez $f(x)$ en fonction de $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1}$.

b) Déterminez une fonction H telle que $\sqrt{x} H'(\sqrt{x}) = h(x)$ pour $x \in I, x > 0$.

c) Calculez des expressions simplifiées de $g(x)$ et $h(x)$, puis donnez la valeur de s .

****15)** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculez les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n \cdot 2^n}$.

****16)** Calculez la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{(n+1)2^n}$.

****17)** On considère la série de fonctions $\sum (-1)^n \ln(n) x^n$.

a) Donner le rayon de convergence de cette série entière.

b) On note S sa somme. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1}.$$

c) En déduire que S a une limite en 1_- et la calculer.

Oraux de concours

1) IMT

- a) Donner un équivalent simple de $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.
- b) Donner le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} H_n x^n$, puis calculer la somme de cette série entière.

2) IMT

- a) Donner les d.s.e. de \cos et ch .
- b) Donner le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$.
- c) Expliciter la somme $S(x)$ de cette série entière selon le signe de x .

3) CCINP

On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

- a) Donner son rayon de convergence R .
- b) On note $f(x)$ la somme de cette série pour $x \in]-R, +R[$. Trouver une équation différentielle du premier ordre à coefficients variables vérifiée par f . En déduire f .

4) CCINP

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, et pour $n \geq 2$, $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-1}$.

- a) Exprimer a_n en fonction de n .
- b) On propose une autre méthode.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 4^n$. En déduire une inégalité sur le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

- c) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1+5x}{1+2x-3x^2}$. Calculer le rayon de convergence.
- d) En déduire a_n .

5) IMT

Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$.

- a) La suite est-elle bien définie? unique?
- b) On suppose que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de rayon de convergence non nul. Trouvez une relation entre f et f^2 et en déduire f à l'aide de fonctions usuelles.
- c) Développer f en série entière et conclure.

6) CCINP

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n!}{n^n} x^n$.

7) CCINP

Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum \ln(n)x^n$ et $\sum \ln(n!)x^n$.

8) TPE

On pose $g(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x \sin t} dt$. Montrer que g est développable en série entière et exprimer les coefficients à l'aide des intégrales $\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$.

9) CCINP

On définit (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1}$, puis on pose $v_n = \frac{u_n}{n!}$.

- a) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 .
- b) Exprimer v_{n+1} à l'aide de v_n et n .
- c) En déduire que la suite (v_n) converge et donner sa limite.
- d) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum v_n x^n$. On note S sa somme.
- e) Donner une équation différentielle vérifiée par S .

10) CCINP

On définit la suite (p_n) par $p_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$.

- a) Calculer p_1, p_2, p_3 . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \leq n!$.
- b) Montrer que le rayon de convergence est strictement positif.
- c) Montrer que $f'(x) = e^x f(x)$. En déduire $f(x)$.
- d) Montrer que p_n est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

11) **CCMP** Pour $n \geq 2$, $a_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$. Étudier la convergence des séries $\sum a_n R^n$ et $\sum a_n (-R)^n$.

12) **CCMP** Soit (a_n) une suite de réels positifs. On suppose que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence égale à 1 et que la série $\sum a_n$ converge. Montrez que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

13) **CCMP** Soit (a_n) une suite de réels positifs. On suppose que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence égale à 1 et que f est bornée sur $[0, 1[$. Montrez que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

14) **CCMP** Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $n \left(\frac{a_n^2}{a_{n-1} a_{n+1}} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$.

- a) Si $\ell \neq 0$, déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.
- b) Que se passe-t-il pour $\ell = 0$?

15) **CCMP** Calculer $w_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2k}{k}$. Indication : utiliser la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

16) **CCMP** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k \cdot k!$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

- a) Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
- b) Y-a-t-il convergence pour $x = R$? pour $x = -R$?
- c) Calculer la limite de S en R .

17) **CCMP**

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer la valeur de $\int_0^1 t^n \ln(t) dt$.

b) Montrez que $t \mapsto e^t \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$, puis que $\int_0^1 e^t \ln(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot n!}$.

18) **CCMP**

a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4}(e^x + 3e^{-x} + 2x e^x)$ est développable en série entière sur \mathbb{R} .

b) On note alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $a_n \neq 0$ et $\frac{1}{a_n} \in \mathbb{N}$.

19) **X** Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1)a_n$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$.

c) Calculer $E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

d) Calculer a_n , puis donner un équivalent simple de a_n .