SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

****1)** Pour chacune des suites de fonctions (f_n) suivantes, étudiez leur convergence simple puis leur convergence uniforme sur l'intervalle I spécifié, puis à défaut, leur convergence uniforme sur tout segment inclus dans I :

a) $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n(1+x^n)}$ sur $I = [0, +\infty[$ b) $f_n : x \mapsto \ln(x + \frac{1}{n})$ sur $I = [1, +\infty[$

c) $f_n : x \mapsto nx^2 e^{-nx}$ sur $I = [0, +\infty[$ d) $f_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^3x^2}$ sur $I = [0, +\infty[$

e) $f_n : x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{nx}$ sur $I =]0, +\infty[$ f) $f_n : x \mapsto \dfrac{nx + n^2x^3}{1+n^2x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

g) $f_n : x \mapsto \left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx}$ sur $I =]0, +\infty[$ h) $f_n : x \mapsto nx^n \sin(\pi x)$ sur $I = [0, 1]$

i) $f_n : x \mapsto \dfrac{n^3 x}{n^4 + x^4}$ sur $I = \mathbb{R}$ j) $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ sur $I = [0, +\infty[$

k) $f_n : x \mapsto \cos\left(\dfrac{nx}{n+1}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.

****2)** On pose $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$. Montrez que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement et uniformément sur $]0, +\infty[$.

****3)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto n\left(f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right)$.

a) Montrez que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
b) Montrez que la convergence est uniforme.

****4)** Soit f une fonction lipschitzienne sur $[0, 1]$.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, $x + \dfrac{x(1-x)}{n} \in [0, 1]$.
b) On pose $f_n : x \mapsto f\left(x + \dfrac{x(1-x)}{n}\right)$. Montrez que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

****5)** Pour $x \geqslant 0$, on pose $u_0(x) = 0$ et $u_{n+1}(x) = \sqrt{x + u_n(x)}$.

a) Montrez que la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers une fonction f que vous expliciterez.
b) On pose $\varphi_x : t \mapsto \sqrt{x+t}$. Vérifiez que φ_x est $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$-lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
c) Montrez que pour tout $b > a > \dfrac{1}{4}$, la convergence de la suite (u_n) est uniforme sur $[a, b]$.

****6)** Étudiez la nature des séries de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ (convergence simple, convergence normale, convergence uniforme) sur I ou à défaut sur tout segment inclus dans I :

a) $u_n : x \mapsto \dfrac{n+x}{n^3+x^2}$ sur $I = \mathbb{R}_+$ b) $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^n}$ sur $I = \mathbb{R}_+$

c) $u_n : x \mapsto \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ d) $u_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^3x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

e) $u_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n nx}{1+n^2x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ f) $u_n : x \mapsto \dfrac{n+x^2}{n^3+x^3}$ sur $I = \mathbb{R}_+$

g) $u_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^4x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ h) $u_n : x \mapsto \cos^n x \sin x$ sur $I = [0, \pi]$

i) $u_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{1+nx^{2n}}$ sur $I = \mathbb{R}_+$ j) $u_n : x \mapsto \arctan(n+x) - \arctan n$ sur $I = \mathbb{R}$

k) $u_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{nx+1}$ sur $I = \mathbb{R}_+$

****7)** Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n : x \mapsto \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ sur $[0, +\infty[$.

a) Montrez que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
b) Montrez qu'elle ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.
c) Montrez qu'elle converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

****8)** Même exercice avec $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{n + (n(x-n))^2}$ pour $n \geqslant 1$.

****9)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto (-1)^n x^{2n} \ln x$ sur $]0,1]$ et $u_n(0) = 0$.

a) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[0,1]$. On note f sa somme, que vous calculerez explicitement.

b) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

c) Justifiez l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Montrez la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et donnez sa valeur sous forme d'une somme de série.

****10)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ sur $]-1,+\infty[$.

a) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]-1,+\infty[$. On note f sa somme.

b) Montrez que pour tout $a > -1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $]-1,a]$. Déduisez-en que f est continue sur $]-1,+\infty[$.

c) Précisez sa monotonie. Justifiez l'existence de limites pour f en -1 et en $+\infty$. Précisez la valeur de $\lim_{x\to -1} f(x)$.

d) Montrez que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n(x)$. Déduisez-en que $\lim_{+\infty} f \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, puis précisez la valeur de $\lim_{+\infty} f$.

e) Donnez une écriture de $\dfrac{f(x)}{x}$ sous forme de série, justifiez que cette série converge uniformément sur $[0,+\infty[$ et déduisez-en $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

f) Donnez l'allure de la courbe de f.

****11)** On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln n}{1+n^2 x}$.

a) Montrez que f est définie sur $[0,+\infty[$.

b) Montrez que f est continue sur $]0,+\infty[$ mais n'est pas continue en 0.

****12)** Reprenez les deux exercices précédents et étudiez la dérivabilité de la fonction somme.

****13)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^2 x + n}$ sur $[0,+\infty[$.

a) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. On note f sa somme.

b) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

c) Montrez que f est continue sur $[0,+\infty[$ et possède une limite réelle en $+\infty$ que vous préciserez.

d) Montrez que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

****14)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \mapsto \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f sa somme. Précisez sa monotonie et montrez que f possède une limite réelle en $+\infty$.

b) Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

c) Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$.

d) Calculez la limite réelle en $+\infty$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Une piste possible : utiliser $\arctan t + \arctan \dfrac{1}{t} = \dfrac{\pi}{2}$ quand $t > 0$.)

e) Montrez que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$.

****15)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2} \cos\left(\dfrac{x}{n+x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+$.

a) Montrez que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.

b) Montrez que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et possède une limite réelle en $+\infty$ que vous préciserez.

d) Montrez que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

****16)** Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

a) Justifiez la bonne définition de f.

b) Montrez que f est continue sur $]0, +\infty[$ et possède une limite réelle en $+\infty$ que vous préciserez.

c) En étudiant la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$, donnez un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

d) Précisez la monotonie de f, justifiez l'existence d'une limite ℓ en 0.

e) Montrez que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+n^2x^2}$. Déduisez-en que $\ell = +\infty$.

f) Montrez que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

****17)** Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$.

a) Montrez que f est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

b) Montrez que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

c) Montrez que pour tout $x > 0$, $f'(x) = f(x) - \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

Déduisez-en que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

d) Montrez que $g = f - 1$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2\ln 2$.

(on admettra que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$: démonstration ultérieure).

****18)** Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1}$.

a) Justifiez la bonne définition de f.

b) Montrez que f est continue sur $]0, +\infty[$ et possède une limite réelle en $+\infty$ que vous préciserez.

c) Montrez que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

****19)** On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1+x^n)$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Montrez que f est continue sur $[0, 1[$.

c) Quelle est la limite de f en 1_- ?

d) Montrez que f est de classe C^1 sur $]-1, +1[$.

****20)** On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n^{3/2}}$.

a) Montrez que f est bien définie sur $[0, +\infty[$.

b) Montrez que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculez $f'(x)$ pour $x > 0$.

c) Montrez que f n'est pas dérivable en 0.

d) Donnez un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

*****21)** Étudiez les propriétés de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(1+x^n)}$ (indication : trouver une relation entre $f(1/x)$ et $f(x)$).

Oraux de concours

1) CCINP Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [-1,+1] \mapsto \sin(nxe^{-nx^2})$.

a) Montrez que (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[-1,+1]$.

b) Montrez qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$ pour tout $a > 0$.

c) Y-t-il convergence uniforme sur $[-1,+1]$?

2) CCINP

a) Montrez que pour tout $t \in \left[\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, $|\ln(1+t) - t| \leqslant 2t^2$.

b) Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right)$.

3) IMT Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = a_n x^n(1-x)$.

a) Montrez que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b) Montrez que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et s.si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

c) Montrez que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et s.si (a_n) converge vers 0.

4) TPE Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+x)}$.

a) Étudiez la convergence de la série sur $]0,+\infty[$.

b) Calculez $f(1)$.

c) La fonction f est-elle de classe C^1 ?

d) Exprimez $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.

5) IMT Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$.

a) Déterminez le domaine de définition de f.

b) Étudiez la continuité de f.

c) Montrez que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

d) Déterminez la limite ℓ de f en $+\infty$ et donnez un équivalent de $f(x) - \ell$.

e) Étudiez les variations de f.

6) CCINP Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

a) Étudiez la convergence de $\sum u_n$. On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

b) Montrez que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrez que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Calculez S.

7) CCINP Pour $x > 0$ et $n \geqslant 2$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

a) Déterminez le domaine D de convergence de $\sum u_n$.

b) Montrez que la série ne converge pas normalement.

c) Montrez que le reste d'ordre n de la série vérifie $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

d) Étudiez la continuité de $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ sur D.

e) Montrez que S est intégrable sur D.

8) IMT Soit $f_n : x \mapsto (x^2+1)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

a) Montrez que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

b) Calculez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$.

9) CCMP

a) Montrez que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

b) Trouvez les limites de f en 0 et en $+\infty$, et donnez des équivalents de f en 0 et en $+\infty$.

10) CCMP Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-nx})$.

a) Déterminez le domaine de définition de f.

b) Montrez que f est continue et strictement décroissante sur I.

c) Montrez que f admet une limite en $+\infty$ que vous déterminerez.

d) Trouvez un équivalent de f en 0. On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.