

Problème 1 - Une série de fonctions

Soit α un réel strictement positif. Pour n entier naturel non nul, on considère l'application u_n de $]0, +\infty[$ vers \mathbb{R} définie par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}.$$

Q 1. *Étude des modes de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$*

- a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- b) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Prouver que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, b]$.
- c) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.
- d) Montrer que, pour tout $a > 0$, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Q 2. On suppose dans cette question que : $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Pour x élément de $]0, +\infty[$, on pose : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

a) Établir l'inégalité :

$$R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n} (1 + kx^2)}.$$

b) En procédant par comparaison série-intégrale, montrer que :

$$R_n(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2n}x} \ln \left(\frac{1 + (2n+1)x^2}{1 + (n+1)x^2} \right).$$

c) En déduire que la série $\sum u_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, a]$ où a est un réel strictement positif.

On note S l'application de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Étude de la régularité de S

Q 3. Montrer que, si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors la fonction S est continue sur $]0, +\infty[$.

Quand $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, sur quel intervalle peut démontrer *sans calcul supplémentaire* que la fonction S est continue ?

Q 4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.

Q 5. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, la fonction S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Q 6. On suppose que : $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Soit x un réel strictement positif.

- a) Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t} (1 + tx^2)} dt$ en justifiant bien sûr la convergence de l'intégrale.
- b) Montrer alors : $\pi - 2 \arctan(x) \leq S(x)$.
- c) En déduire que S n'est pas continue en 0.

Problème 2 - Étude aux extrémités

D'après CCP PC 2013.

Q 1. Dans cette question, pour tout $x \in]-1, +1[$, on pose : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}$.

- a) Soit $a \in]0, 1[$. Prouver la convergence normale de cette série de fonctions sur le segment $[-a, a]$. En déduire que F est définie et continue sur $] -1, +1[$.

b) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1-x^n}{1-x} \leq n$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x)$.

Q 2. Dans cette question, f est une application réelle continue et croissante sur $]0, 1[$ avec $f(0) = 0$ et telle que $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ soit intégrable sur $]0, 1[$. Soit $x \in]0, 1[$.

a) Justifier l'existence de $G(x) = \int_0^{+\infty} f(x^t) dt$ et l'égalité : $G(x) = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'encadrement :

$$\int_n^{n+1} f(x^t) dt \leq f(x^n) \leq \int_{n-1}^n f(x^t) dt.$$

c) En déduire l'existence de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$, ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x .

d) Conclure avec soin que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du.$$

Q 3. Montrer que pour tout $t \in]-1, 1[$, $\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k}$: on pourra utiliser le fait que $\ln(1+t) = \int_0^t \frac{1}{1+u} du$.

Q 4. *Calcul d'une intégrale*

On cherche à déterminer la valeur de l'intégrale généralisée $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

a) Justifier que cette intégrale converge.

b) Démontrer que : $I = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. En déduire la valeur de I .

Q 5. Pour tout $x \in]-1, +1[$, on pose cette fois : $F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$.

a) Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $] -1, +1[$ et exprimer sa dérivée sous la forme d'une somme de série de fonctions.

b) Grâce à la question 2-d, montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} du = I.$$

c) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left((1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \right) = I.$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^-} ((1-x)^2 F'(x))$.