Problème 1 - CCINP 2022 - MP - math 1

Dans ce problème, on étudie certaines intégrales et séries numériques reliées aux intégrales dites de Fresnel. Augustin Fresnel (1788-1827) démontra le caractère ondulatoire de la lumière et, pour cette raison, il est considéré comme un des fondateurs de l'optique moderne.

I. Intégrales fonctions de leur borne

Dans cette partie, on définit la fonction H par l'expression $H(x) = \displaystyle\int_0^x e^{it^2}\mathrm{d}t$, où e^{it^2} signifie $\exp\left(it^2\right)$

Q 1. Démontrer que H est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $H'(x)$.

Q 2. Étudier la parité de la fonction H.

Q 3. Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{it^2}$ est développable en série entière au voisinage de 0. En déduire un développement en série entière de la fonction H au voisinage de 0, en précisant l'intervalle sur lequel ce développement est valable.

Q 4. Si $x > 0$, démontrer que :

$$H(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du.$$

Q 5. Pour $x > \sqrt{2\pi}$, en déduire que :

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = -i\frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}du.$$

Q 6. En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t$ converge.

Q 7. *Informatique Pour Tous.*
Proposer, en langage Python, une fonction `I(f, a, b, n)` qui prend en entrée une fonction `f` à valeurs réelles ou complexes, deux réels `a` et `b` et un entier naturel `n` et qui renvoie une valeur approchée avec la méthode des rectangles de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ calculée avec n rectangles.

Q 8. *Informatique Pour Tous.*
Proposer, en langage Python, une fonction `H(x, n)` qui prend en entrée un réel `x` et un entier naturel `n` et qui renvoie une valeur approchée de $H(x)$ calculée avec la fonction de la question précédente. On rappelle que le code Python, pour e^{it^2}, est `exp (1 j * t * * 2)`.

II. Calcul des intégrales de Fresnel

Dans cette partie, on étudie la fonction g d'expression :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2\left(t^2-i\right)}}{t^2-i}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela, on pose $f(x,t) = \dfrac{e^{-x^2\left(t^2-1\right)}}{t^2-i}$.

Q 9. Si $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, déterminer les modules des nombres complexes $e^{-x^2\left(t^2-i\right)}$ et $t^2 - i$.

Q 10. Démontrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser un argument de parité).

Q 11. Soit $(x_n)_n$ une suite divergente vers $+\infty$.
À l'aide du théorème de convergence dominée, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = 0$.
En déduire la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Q 12. Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Q 13. On admet dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à $\sqrt{\pi}$. Vérifier que :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}.$$

Q 14. Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2-i}$. On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2-i}=\frac{1-i}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1}+\frac{i}{X^2-X\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1}+\frac{i}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right).$$

Démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t=\pi\sqrt{2}$, Donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$ puis déterminer la valeur de $g(0)$.

Q 15. En déduire que :

$$\forall x>0,\quad g(x)=\frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}}-2\sqrt{\pi}\times H(x)$$

où la fonction H a été introduite dans la partie I.

Donner ensuite les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{it^2}\,\mathrm{d}t$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$.

Partie III - Etude d'une série de fonctions

Dans cette partie, on étudie la fonction S d'expression :

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction d'expression $f_n(x)=\dfrac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

Q 16. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. En admettant l'identité suivante :

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{n=1}^{N}a_n\left(b_n-b_{n-1}\right)=\sum_{n=1}^{N}\left(a_n-a_{n+1}\right)b_n+a_{N+1}b_N-a_1b_0.$$

démontrer que la série $\sum a_n\left(b_n-b_{n-1}\right)$ converge.

Q 17. Soient $x\in]0,2\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}=e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\times\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Q 18. À l'aide des deux questions précédentes, démontrer que S est définie sur $]0,2\pi[$.

Q 19. On admet dans cette question que si $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,2\pi[$:

$$\left|\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}-\int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}$$

Démontrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $x\in]0,2\pi[$:

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x)-\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}dt\right|\leqslant C$$

Q 20. Démontrer la convergence de l'intégrale $J(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{itx}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Déterminer la limite, quand x tend vers 0^+, de $I(x)=\sqrt{x}J(x)$.

Q 21. Déterminer la limite en 0^+ de la fonction $x\mapsto\dfrac{e^{ix}-1}{ix}$. Donner alors un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.