

## Problème 1 - CCINP 2013 - PC

On s'intéresse ici à des suites et séries de fonctions en liaison avec des intégrales.

Les parties I et II sont indépendantes. On admet les résultats suivants :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \int_0^1 \frac{\ln u}{u-1} du = \frac{\pi^2}{6}$$

### I. Étude de quelques suites d'intégrales

**Q 1.**

a) On considère ici une application continue  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 f(t^n) dt$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

b) On suppose ici de plus que  $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .  
Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ .

*On pourra transformer  $nI_n$  grâce à un changement de variable.*

c) Application 1.

Déterminer un équivalent quand  $n \rightarrow +\infty$  de  $\int_0^1 \sin(t^n) dt$  (grâce à une intégrale).

**Q 2.** On considère maintenant que  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une application continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Grâce à un changement de variable approprié, justifier l'existence de  $A_n = \int_1^{+\infty} f(t^n) dt$ .

b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nA_n$  (grâce à une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer).

**Q 3.**

a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , et tout  $A > 1$ , on pose  $C_n(A) = \int_1^A \sin(t^n) dt$ .

Grâce à un changement de variable et une intégration par parties, exprimer  $C_n(A)$  en fonction de  $\int_1^{A^n} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}} du$  et de  $A$ .

b) En déduire que  $C_n(A)$  a une limite quand  $A \rightarrow +\infty$ , prouvant l'existence de  $\int_1^{+\infty} \sin(t^n) dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

c) Application 2.

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt$  grâce à  $K$ , admise en préambule.

### II. Étude de séries de fonctions

**Q 4.** Un premier exemple.

a) Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , calculer  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$  ainsi que  $F'(x)$ .

b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F'(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^2 F'(x)$ .

**Q 5.** Un deuxième exemple.

Dans cette question, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on pose cette fois  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ .

a) Soit  $a \in ]0, 1[$ . Prouver la convergence normale de cette série de fonctions sur le segment  $[-a, a]$ .  
En déduire que  $F$  est définie et continue sur  $] -1, 1[$ .

b) Montrer que, pour tout  $x \in ]0, 1[$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{1-x^n}{1-x} \leq n$ .  
En déduire  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x)$ .

**Q 6.** Dans cette question,  $f$  est une application réelle continue et croissante sur  $[0, 1[$  avec  $f(0) = 0$  et telle que  $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$  soit intégrable sur  $]0, 1[$ .  
Soit  $x \in ]0, 1[$ .

a) Justifier l'existence de  $G(x) = \int_0^{+\infty} f(x^t) dt$  et l'égalité  $G(x) = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , justifier l'encadrement :

$$\int_n^{n+1} f(x^t) dt \leq f(x^n) \leq \int_{n-1}^n f(x^t) dt.$$

c) En déduire l'existence de  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$ , ainsi qu'un encadrement de  $F(x)$  par deux intégrales dépendant de  $x$ .

d) Conclure avec soin que :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$ .

**Q 7.** Un dernier exemple.

Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on pose enfin cette fois :  $F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$ .

a) Montrer que  $F$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $] -1, 1[$  et exprimer sa dérivée sous la forme d'une série de fonctions.

b) Grâce à 6.(d), montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} du$  (intégrale donnée en préambule).

c) Par une méthode similaire à celle de la question 6., montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( (1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \right) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} du.$$

En déduire  $\lim_{x \rightarrow 1^-} ((1-x)^2 F'(x))$ .