Limites et continuité

Dans ce cours, on appellera domaine tout ensemble D non vide et non réduit à un singleton qui est
- un intervalle (α, β)
- ou un intervalle privé d'un point $(\alpha, \gamma[\cup]\gamma, \beta)$.

On note alors $\overline{D}$ l'ensemble D auquel on ajoute ses bornes réelles. Par exemple, si $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$, alors $\overline{D} = [0,+\infty[$.

1 Limites réelles en un point

1.1 Définition

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un domaine D et soit $a \in \overline{D}$. Soit ℓ un réel.
On dit que f a pour limite ℓ en a (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a) quand

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \cap [a-\eta, a+\eta] \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

1.2 Unicité de la limite

Proposition 1. *Avec les mêmes hypothèses, si f a pour limite ℓ en a, alors f ne peut pas avoir d'autre limite.*

On note alors $\ell = \lim\limits_{a} f$ ou $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

1.3 Lien avec les suites

Théorème 1 (caractérisation séquentielle de la limite)**.** *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un domaine D et soit $a \in \overline{D}$. Soit ℓ un réel.*
f a pour limite ℓ en a si et seulement si pour toute suite u à termes dans D convergeant vers a, la suite $f \circ u = (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Remarque.
- Ce résultat est le plus souvent utilisé dans le sens gauche-droite pour étudier la convergence d'une suite. Le sens droite-gauche n'est utilisé que dans le cadre d'étude théorique (dans ce qui suit).
- Pour prouver qu'une fonction n'a pas de limite en un point a, il suffit donc de trouver deux suites u et v qui convergent vers a et telles que les suites $f \circ u$ et $f \circ v$ aient des limites différentes : l'existence d'une limite de f (et donc le sens gauche-droite du théorème précédent) est contradictoire avec cette hypothèse.

***Exercices* :**
1) Montrez que la fonction partie entière a une limite réelle en tout point non entier mais pas de limite en tout point entier.
2) Montrez que la fonction $x \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite réelle en 0.

1.4 Opérations sur les limites réelles

Grâce au théorème précédent, on peut démontrer les th. d'opérations sur les limites de fonctions en se ramenant au th. d'opérations sur les suites convergentes.

Théorème 2. *Soit f, g deux fonctions définies sur un domaine D et soit $a \in \overline{D}$. Soit ℓ, ℓ' deux réels.*
Si f a pour limite ℓ en a et g a pour limite ℓ' en a, alors

- ▷ *$f + g$ a pour limite $\ell + \ell'$ en a*
- ▷ *$f.g$ a pour limite $\ell.\ell'$ en a*
- ▷ *$\dfrac{f}{g}$ a pour limite $\dfrac{\ell}{\ell'}$ en a à la condition que $\ell' \neq 0$.*

1.5 Théorème d'encadrement

Théorème 3 (première forme)**.** *Soit f, g, h trois fonctions définies sur un domaine D et soit $a \in \overline{D}$. Soit ℓ un réel.*
Si $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a et si f et h ont pour limite commune ℓ en a, alors g a pour limite ℓ en a.

Théorème 4 (deuxième forme)**.** *Soit f, g deux fonctions définies sur un domaine D et soit $a \in \overline{D}$. Soit ℓ un réel.*
Si $|f - \ell| \leqslant g$ au voisinage de a et si g a pour limite 0 en a, alors f a pour limite ℓ en a.

2 Limites infinies en un point

2.1 Définitions

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un domaine D et soit $a \in \overline{D}$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ en a (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a) quand

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \cap [a - \eta, a + \eta] \quad f(x) \geqslant A$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en a (ou que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a) quand

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \cap [a - \eta, a + \eta] \quad f(x) \leqslant A$$

Dans ces cas, on note $\lim\limits_{a} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ ou etc.

2.2 Lien avec les suites

Théorème 5 (caractérisation séquentielle de la limite)**.** *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un domaine D et soit $a \in \overline{D}$. Soit ℓ un réel.*
f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a si et seulement si pour toute suite u à termes dans D convergeant vers a, la suite $f \circ u = (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

2.3 Opérations sur les limites

Théorème 6. *Soit f, g deux fonctions définies sur un domaine D. Soit $a \in \overline{D}$. On suppose que f, g ont pour limites respectives ℓ, ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a. Alors on a les limites suivantes pour $f+g$, $f.g$, $\dfrac{f}{g}$ en a :*

$\lim\limits_a f+g$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell = +\infty$	$\ell = -\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$\ell' = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Pour les produits et quotients, on suppose que f et g sont positives au voisinage de a. Dans les autres cas, on n'oubliera pas les signes.

$\lim\limits_a f.g$	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell = 0$	$\ell = +\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell.\ell'$	0	$+\infty$
$\ell' = 0$	0	0	?
$\ell' = +\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$

$\lim\limits_a \dfrac{f}{g}$	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell = 0$	$\ell = +\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$
$\ell' = 0$	$+\infty$	?	$+\infty$
$\ell' = +\infty$	0	0	?

Les points d'interrogation désignent les 4 formes indéterminées qu'on note symboliquement

$$\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$$

On y ajoute 3 autres formes indéterminées, notées symboliquement

$$1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$$

Démonstration laissée en exercice. On se ramène aux th. d'opérations sur les limites de suites grâce au th. 1 et 5. •

2.4 Théorème d'encadrement

Théorème 7. *Soit f, g deux fonctions définies sur un domaine D et soit $a \in \overline{D}$.*
Si $f \leqslant g$ au voisinage de a et si f a pour limite $+\infty$ en a, alors g a pour limite $+\infty$ en a.

On a bien sûr la version correspondante pour la limite en $-\infty$.

Démonstration laissée en exercice. On se ramène aux th. d'encadrement sur les suites grâce au th. 5. •

3 Limites à droite ou à gauche

3.1 Définitions

Définition. Soit f une fonction définie sur un domaine D et $a \in \overline{D}$.

On dit que f a une limite à droite en a quand la fonction $f\big|_{]a,+\infty[}$ a une limite en a. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\to a_+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a,\ x>a} f(x)$ cette limite.

On dit que f a une limite à gauche en a quand la fonction $f\big|_{]-\infty,a[}$ a une limite en a. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a,\ x<a} f(x)$ cette limite.

3.2 Extension des résultats

Les limites à droite ou à gauche ne sont que des cas particuliers de limites : tous les résultats montrés avant restent valables.

3.3 Théorème de la limite monotone

Théorème 8 (limite à gauche)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = (\dots, a[$, où a est un réel.*

Si f est croissante et majorée sur I, alors f a une limite réelle en a à gauche. Si f est croissante et non majorée sur I, alors f a pour limite $+\infty$ en a à gauche.

De même, si f est décroissante sur I, alors selon que f soit minorée ou non sur I, f a une limite réelle ou a pour limite $-\infty$ en a à gauche.

Théorème 9 (limite à droite)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a, \dots)$, où a est un réel.*

Si f est croissante et minorée sur I, alors f a une limite réelle en a à droite. Si f est croissante et non minorée sur I, alors f a pour limite $-\infty$ en a à gauche.

De même, si f est décroissante sur I, alors selon que f soit majorée ou non sur I, f a une limite réelle ou a pour limite $+\infty$ en a à droite.

4 Limites en $+\infty$ ou $-\infty$

4.1 Définitions

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = (..., +\infty[$. Soit ℓ un réel.

On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ quand

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \geqslant B \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ quand

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \geqslant B \quad f(x) \geqslant A$$

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]-\infty, \dots)$. Soit ℓ un réel.

On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ quand

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \leqslant B \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ quand

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \leqslant B \quad f(x) \leqslant A$$

4.2 Extension des résultats

Tous les théorèmes valables pour des limites en un point sont valables pour des limites en $+\infty$ ou $-\infty$: caractérisation séquentielle, th. d'opérations sur les limites, th. d'encadrement, th. de la limite monotone.

5 Composition des limites

Théorème 10. *Soit f, g deux fonctions définies sur deux domaines D, E respectivement. Soit $a \in \overline{D}$ et $b \in \overline{E}$.*

Si $f(D) \subset E$, f a pour limite b en a et g a pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en b, alors $g \circ f$ a pour limite ℓ en a.

On généralise ce théorème aux autres cas.

Par exemple, si f est définie sur $I = (\dots, +\infty[$ et g sur un domaine E, si $f(I) \subset E$, si f a pour limite $b \in \overline{E}$ en $+\infty$ et g a pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en b, alors $g \circ f$ a pour limite ℓ en $+\infty$.

Et de même avec les autres possibilités (9 au total sauf erreur).

Démonstration laissée en exercice. •

6 Propriétés locales

Proposition 2. *Soit f une fonction ayant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

- *Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est bornée au voisinage de a.*
- *Si $\ell > 0$, alors f est strictement positive au voisinage de a.*

On déduit du deuxième point qu'il existe une version du th. de passage à la limite pour les fonctions.

Théorème 11. *Soit f, g deux fonctions ayant chacune une limite ℓ, ℓ' respectivement en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Si $f \leqslant g$ au voisinage de a, alors $\ell \leqslant \ell'$.

7 Fonctions continues

7.1 Continuité en un point

Définition. Une fonction f définie sur un intervalle I est dite continue en $x_0 \in I$ quand $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Elle est dite continue à droite en x_0 quand $\lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0)$.

Elle est dite continue à gauche en x_0 quand $\lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0)$.

Donc de manière évidente :

Proposition 3. *f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.*

7.2 Continuité sur un intervalle

Soit I un intervalle, on note $\overset{\circ}{I}$ l'intervalle obtenu en retirant à I ses extrémités (réelles forcément). Par exemple si $I = [0, 1[$, alors $\overset{\circ}{I} =]0, 1[$.

Définition. Une fonction f définie sur un intervalle I est dite continue sur I quand

- f est continue en tout point de $\overset{\circ}{I}$
- si I contient sa borne inférieure a, alors f est continue à droite en a
- si I contient sa borne supérieure b, alors f est continue à gauche en b

Les fonctions continues sont la plupart du temps les fonctions les plus agréables à manipuler : la continuité est une hypothèse quasi-universelle dans les principaux théorèmes d'Analyse. De là à penser que toutes les fonctions sont continues ou presque, il y a un pas que nous ne franchirons pas. Quand on prend « au hasard » une fonction dans l'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la probabilité qu'elle soit continue est nulle.

Exercices :

3) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{|x^2 - y^2|}{xy}$. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
4) Montrez que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ ($f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ sinon) n'est continue en aucun point.
5) Soit g la fonction définie par : $g(x) = 0$ si x n'est pas rationnel et $g(x) = \dfrac{1}{q}$ si x est un rationnel écrit sous forme irréductible $\dfrac{p}{q}$ (p, q entiers). Montrez que g est continue en tout point irrationnel et non continue en tout point rationnel.

7.3 Fonctions lipschitziennes

Une classe de fonctions continues bien pratiques : les fonctions lipschitziennes.

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est lipschitzienne sur I quand il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

On dit alors que f est M-lipschitzienne sur I (ou lipschitzienne de rapport M).

Exemples.
- Les fonction affines sont lipschitziennes.
- La fonction valeur absolue est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, ainsi que les fonctions $\arcsin \circ \sin$ et $\arccos \circ \cos$.
- La fonction $x \mapsto x^2$ est lipschitzienne sur tout segment de $\mathbb{R}$, mais n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercices :

6) Montrez que les fonctions $x \mapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{N}$) sont lipschitziennes sur tout segment, puis que les fonctions polynômes le sont aussi. Quelles sont les fonctions polynômes lipschitziennes sur $\mathbb{R}$?
7) Montrez que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a > 0$, mais qu'elle ne l'est pas sur $[0, +\infty[$.
8) Montrez que la fonction arctan est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4. *Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle est continue sur cet intervalle.*

Remarque. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la fonction racine carrée, continue sur $[0, +\infty[$, mais non lipschitzienne sur ce même intervalle.

7.4 Opérations sur les fonctions continues.

On montre les résultats suivants en se servant des th. d'opération sur les limites ou de composition des limites.

Théorème 12 (Théorème d'opérations sur les fonctions continues)**.** *Soit f, g deux fonctions définies sur un intervalle I et $x_0 \in I$.*

Si f et g sont continues en x_0, alors $f + g$ et $f.g$ sont continues en x_0 ; si de plus, $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.

Théorème 13 (Théorème de composition de fonctions continues)**.** *Soit f définie sur I et g définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$.*
Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

En se plaçant en chaque point des intervalles, on en déduit les théorèmes suivants.

Théorème 14 (Théorème d'opérations sur les fonctions continues)**.** *Si f, g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, alors $f + g$ et $f.g$ sont continues sur I ; si de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.*

Théorème 15 (Théorème de composition de fonctions continues)**.** *Si f est continue sur I et g continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.*