Intégrales à paramètre

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions dans ce chapitre sont à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On considère dans ce chapitre des intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b f(p,t)\,\mathrm{d}t$ où $f(p,t)$ est une expression qui dépend de deux variables p et t, p pouvant être de n'importe quel type mais t bien sûr réelle. Par habitude, on distingue dans le vocabulaire ces deux variables : t est appelée la variable d'intégration (notez le $\mathrm{d}t$ qui le signale) et p est appelée le paramètre.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(p,t)\,\mathrm{d}t$ est donc une intégrale qui dépend du paramètre p (mais qui ne dépend bien entendu pas de t) et l'objet de ce chapitre est d'étudier des résultats concernant cette dépendance vis-à-vis de p, en somme d'étudier des propriétés de l'application $p \mapsto \displaystyle\int_a^b f(p,t)\,\mathrm{d}t$.

Les sections 2 et 3 étudient surtout le cas où p est un paramètre entier naturel, les suivantes le cas où p est un paramètre réel.

1 Introduction

Pour commencer, un exercice d'intervertion de symboles, qui marque le début de l'étude de ce problème général et qui va nous occuper durant quelques chapitres.

***Exercices* :**

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = n^2 e^{-nx}(1 - e^{-x})$.
   Pour $x \geqslant 0$, que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$?
   Montrez la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et donnez sa valeur en fonction de n.
   Comparez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$.
   Quelle conclusion peut-on en tirer ?

2 Convergence simple

2.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions définies sur A.
On dit que la suite (f_n) converge simplement sur A quand pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge.
Dans ce cas, on peut définir une fonction f sur A en posant, pour chaque $x \in A$, $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
La fonction f est alors appelée limite simple sur A de la suite (f_n) et on dit que la suite (f_n) converge simplement vers f sur A.

***Exercices* :**

2) Étudiez la convergence simple de la suite des fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sur $[0, +\infty[$.
3) Même question avec la suite des fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{1 + x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sur $[0, +\infty[$.
4) Même question avec la suite des fonctions $f_n : x \mapsto n^\alpha x^n(1 - x)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sur $[0, 1]$, où α est un réel strictement positif.
5) Même question avec la suite des fonctions définies par récurrence sur $\mathbb{R}_+^*$: pour $x > 0$, $f_0(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(f_n(x) + \dfrac{x}{f_n(x)}\right)$.

2.2 Convergence simple d'une série de fonctions

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions définies sur A.
On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur A quand pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge.
Autrement dit, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur A quand la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ converge simplement sur A.

Dans ce cas, on peut définir une fonction f sur A en posant, pour chaque $x \in A$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

La fonction f est alors appelée (fonction) somme sur A de la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

Exercices :

6) Étudiez la convergence simple de la série de fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{nx^2}{n^3 + x^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sur $[0, +\infty[$.
7) Même question avec la série de fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{1 + x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sur $[0, +\infty[$.
8) Même question avec la série de fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^3 + x^3}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sur $[0, +\infty[$.

3 Suites et séries de fonctions intégrables

Dans cette section, tous les théorèmes sont admis (démonstrations très difficiles !).

3.1 Théorème de convergence dominée

Théorème 1. *Soit I un intervalle, (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I.*
- *Si la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f qui est continue par morceaux sur I*
- *et il existe une fonction φ, intégrable sur I et à valeurs positives, telle que*

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ (hypothèse de domination)

alors les fonctions f et f_n sont toutes intégrables sur I et $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$.

L'hypothèse de domination est essentielle ! Il s'agit donc de trouver une fonction φ (dont on dit qu'elle domine la suite (f_n)) et intégrable et **surtout qui ne dépend pas de n** !

Exercices :

9) Montrez que la suite d'intégrales $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t \; e^{-nt^2} \,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et qu'elle converge vers 0.
10) Montrez que la suite d'intégrales $\left(\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t\right)$ converge vers 0.
11) Montrez que la suite d'intégrales $\left(\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{x^2} \,\mathrm{d}x\right)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et déterminez sa limite.
12) Montrez que pour tout $n \geqslant 2$, $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^n}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis donnez la limite des intégrales quand $n \to +\infty$.

Quitte à utiliser la caractérisation séquentielle de la limite, on peut étendre le théorème précédent à des fonctions paramétrées par un réel.

Théorème 2. *Soit I, A deux intervalles, $(f_a)_{a\in A}$ une famille de fonctions continues par morceaux sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f_a(x)$ tend vers $f(x)$ quand a tend vers α, où f est une fonction continue par morceaux sur I*
- *et il existe une fonction φ, intégrable sur I et à valeurs positives, telle que*

$$\text{pour tout } a \in A \text{ et } t \in I,\ |f_a(t)| \leqslant \varphi(t) \text{ sur } I \text{ (hypothèse de domination)}$$

alors les fonctions f et f_a sont toutes intégrables sur I et $\displaystyle\int_I f_a \xrightarrow[a\to\alpha]{} \int_I f$.

***Exercices* :**

13) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

Montrez que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Déterminez un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0.

14) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Montrez que f a une limite réelle ℓ en 0.

Déterminez un équivalent simple de $f(x) - \ell$ quand x tend vers 0.

3.2 Théorème d'intégration terme à terme

On donne deux versions du théorème, la première portant sur les fonctions à valeurs positives et qui énonce une équivalence, la seconde portant sur des fonctions quelconques et qui énonce une condition suffisante.

Théorème 3. *Soit I un intervalle, (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I.*
- *Si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction qui est continue par morceaux sur I,*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I **et positive**,*

alors la fonction somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I si et s.si la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_I f_n$ converge.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n$

Théorème 4. *Soit I un intervalle, (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I.*
- *Si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction qui est continue par morceaux sur I,*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I,*
- *et la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_I |f_n|$ converge,*

alors la fonction somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n$.

L'hypothèse de convergence de la série des intégrales des valeurs absolues est essentielle, mais hélas très contraignante. Il arrive souvent qu'il soit plus facile d'utiliser le th. de convergence dominée sur les sommes partielles de la série de fonctions, voire même un simple encadrement.

***Exercices* :**

15) Justifiez l'existence et calculez $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

16) Soit $\theta \in]0,\pi[$. Montrez que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{i\theta}-t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-in\theta}}{n}$.

17) Montrez que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$, puis donner la valeur de cette somme.

4 Fonctions définies par une intégrale à paramètre

On s'intéresse aux propriétés des fonctions définies par des intégrales du type $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$. On dit que x est un paramètre de l'intégrale $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

4.1 Continuité

Théorème 5. *Soit A, I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $A \times I$.*

- *Si pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,*
- *pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A,*
- *et il existe une fonction φ, intégrable sur I et à valeurs positives, telle que*

$$\text{pour tout } (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination),}$$

alors pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Exercices :

18) Montrez que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

19) Montrez que la fonction $h : u \mapsto \displaystyle\int_0^1 \arctan(u + x\ln x)\,\mathrm{d}x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

4.2 Dérivabilité

Théorème 6. *Soit A, I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $A \times I$.*

- *Si pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I,*
- *pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur A,*
- *pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur A,*
- *et il existe une fonction φ, intégrable sur I et à valeurs positives, telle que*

$$\text{pour tout } (x,t) \in A \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination),}$$

alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur A et pour tout $x \in A$, $g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Exercices :

20) Montrez que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

21) Montrez que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt^2)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Ce théorème est généralisable pour des dérivations d'ordre plus élevé.

Théorème 7. *Soit A, I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $A\times I$.*
- *Si pour tout $x\in A$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I,*
- *pour tout $t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur A,*
- *pour tout $x\in A$, pour tout $j\in [\![1,k]\!]$, $t\mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I,*
- *et il existe une fonction φ, intégrable sur I et à valeurs positives, telle que pour tout $(x,t)\in A\times I$,*

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination),}$$

alors la fonction $g:x\mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^k sur A et pour tout $x\in A$, pour tout $j\in[\![1,k]\!]$, $g^{(j)}(x)=\displaystyle\int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Exercices :

22) Montrez que la fonction $h:x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+xt)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est de classe C^2 sur $[1,+\infty[$.

23) Montrez que la fonction $g:x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(xt^2)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5 Domination sur des sous-intervalles

Comme on parle de continuité ou dérivabilité sur des intervalles, il est bien sûr sous-entendu qu'on ne considère que des intervalles d'intérieurs non vides (on exclut les intervalles réduits à un point).

Définition. Soit A un intervalle.
Une famille $\mathscr{F}$ d'intervalles de A est dite recouvrante quand $A=\displaystyle\bigcup_{X\in\mathscr{F}} X$ et $\mathring{A}=\displaystyle\bigcup_{X\in\mathscr{F}}\mathring{X}$.

Exemples.
- Si $A=[m,+\infty[$, alors la famille des segments $[m,a]$ est recouvrante : $[m,+\infty[=\displaystyle\bigcup_{a>m}[m,a]$.
- Si $A=]m,+\infty[$, alors la famille des sous-intervalles $[a,+\infty[$ est recouvrante : $]m,+\infty[=\displaystyle\bigcup_{a>m}[a,+\infty[$.
- Si A est un intervalle, alors la famille des (vrais) segments inclus dans A est recouvrante : $A=\displaystyle\bigcup_{\substack{(a,b)\in A^2\\ a<b}}[a,b]$.

Proposition 1. *Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur A et $\mathscr{F}$ une famille recouvrante d'intervalles de A. Alors*
- *f est continue sur A si et s.si pour tout $F\in\mathscr{F}$, f est continue sur F.*
- *f est dérivable sur A si et s.si pour tout $F\in\mathscr{F}$, f est dérivable sur F.*
- *pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, f est de classe C^k sur A si et s.si pour tout $F\in\mathscr{F}$, f est de classe C^k sur F.*

On en déduit alors le théorème suivant, dont il vaut mieux à mon avis sur chaque exercice présenter le détail des idées.

Théorème 8. *Soit A, I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $A \times I$.*
Soit $\mathscr{F}$ une famille recouvrante d'intervalles de A.

- *Si pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,*
- *pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A,*
- *pour toute partie F de $\mathscr{F}$, il existe une fonction φ_F, intégrable sur I et à valeurs positives, telle que*

$$\text{pour tout } (x,t) \in F \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_F(t) \text{ (hypothèse de domination),}$$

alors pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

On a de même une version locale des théorèmes de dérivation sous le signe intégrale.

Autrement dit, au lieu de chercher à appliquer les théorèmes précédents directement sur A, on trouve une famille recouvrante de sous-intervalles sur chacun desquels on peut appliquer les théorèmes précédents, conclure à la continuité ou dérivabilité sur chaque sous-intervalle, puis signaler que par réunion, la propriété reste valable sur A.

Exercices :

24) Montrez que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
25) Montrez que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{t^2}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Donnez une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

6 Complément : la fonction Γ d'Euler

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose quand cela a un sens

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Cette fonction très courante a les propriétés suivantes :

- Γ est définie sur $]0, +\infty[$;
- Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$;
- pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$; $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$;
- il existe un unique $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$; Γ est strictement décroissante sur $]0, \alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$;
- Γ est convexe sur $]0, +\infty[$;
- Γ a des limites infinies en 0 et en $+\infty$.