Problème 1 - Matrices réelles sans valeur propre réelle

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul. Pour alléger les notations, on pose $E_n = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. La lettre X est utilisée ici pour désigner une matrice-colonne, on évitera donc de l'utiliser pour désigner l'indéterminée des polynômes qui sera pour une fois notée x.

Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $S(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Toute matrice Z à coefficients complexes de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $X + iY$ où X, Y sont deux matrices réelles de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On appelle conjuguée de Z la matrice $\overline{Z} = X - iY$.

D'après les propriétés de la conjugaison dans $\mathbb{C}$, on en déduit que les règles de calcul sont les mêmes : $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2$, $\overline{\lambda Z} = \overline{\lambda Z}$ et $\overline{Z_1 . Z_2} = \overline{Z}_1 . \overline{Z}_2$.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on veut montrer l'équivalence suivante :

(α) il existe $(a_1, b_1, \dots, a_m, b_m) \in \mathbb{R}^{2m}$ tel que M soit semblable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale par blocs

$$\operatorname{diag}(S(a_1,b_1), \dots, S(a_m,b_m)) = \begin{pmatrix} S(a_1,b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S(a_2,b_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & S(a_m,b_m) \end{pmatrix}$$

(β) il existe un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ annulateur de M à racines simples non réelles.

I. Un cas particulier simple

Soit ω un complexe non réel. On pose $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \omega z$.

Vérifiez que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, que f a un polynôme annulateur réel à racines simples non réelles et que sa matrice dans un base de $\mathbb{C}$ bien choisie est une matrice $S(a,b)$.

II. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$

Q 1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$. Montrez qu'il existe un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ annulateur de $S(a,b)$ à racines simples non réelles.

Q 2. Montrez l'implication $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$.

III. $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$

Dans cette partie, M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui annule un polynôme réel à racines simples non réelles. On appelle f l'endomorphisme de E_n de matrice M dans la base canonique de E_n (autrement dit, pour tout $Z \in E_n$, $f(Z) = MZ$).

Q 3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{z} = \lambda z$. Montrez qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = e^{2i\theta}$ et $e^{i\theta} z$ est un réel.

Q 4. Montrez que n est pair. On note $n = 2m$.

Q 5. Montrez que si λ est une valeur propre de M, alors $\overline{\lambda}$ en est une aussi, puis que les sous-espaces propres $\operatorname{sep}(M, \lambda)$ et $\operatorname{sep}(M, \overline{\lambda})$ ont la même dimension.

Q 6. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M, Z un vecteur propre de M (Z est donc une colonne de $E_n = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$).

a) Montrez que $\operatorname{vect}(Z, \overline{Z})$ est un plan stable par f.

b) On pose $Z = X + iY$ où X, Y sont des matrices réelles. Montrez que (X, Y) est une base de ce plan.

c) Montrez qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}$ tel que $b \neq 0$ et l'endomorphisme induit par f dans ce plan a pour matrice $S(a,b)$ dans la base (X, Y).

Q 7. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M. On choisit une base de $\operatorname{sep}(M, \lambda)$: $(Z_1, \dots, Z_p)$ et on écrit chaque vecteur sous la forme $Z_k = X_k + iY_k$ où X_k, Y_k sont réelles.

Montrez que les plans $(\operatorname{vect}(X_k, Y_k))_{1 \leqslant k \leqslant p}$ sont en somme directe et que $\operatorname{sep}(M, \lambda) \oplus \operatorname{sep}(M, \overline{\lambda}) = \bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{vect}(X_k, Y_k)$.

Q 8. Montrez qu'il existe une base de E_n constituée de vecteurs réels dans laquelle la matrice de f est égale à une matrice diagonale par blocs $D = \operatorname{diag}(S(a_1, b_1), \ldots, S(a_m, b_m))$.

Montrez enfin qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$.

IV. Un exemple

On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q 9. On écrit $xI_4 - M$ par blocs (2,2) : $xI_4 - M = \begin{pmatrix} A & -4I_2 \\ 2I_2 & B \end{pmatrix}$

a) Calculez le produit par blocs $\begin{pmatrix} -4I_2 & A \\ B & 2I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2I_2 & 0 \\ B & I_2 \end{pmatrix}$. Déduisez-en que $\det(xI_4 - M) = \det(AB + 8I_2)$.

b) Explicitez le polynôme caractéristique de M. Déterminez ses racines imaginaires pures, puis les autres racines.

Q 10. Montrez que M annule un polynôme réel à racines simples non réelles.

Vérifiez que les vecteurs-colonnes $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 2-2i \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M, puis donnez une matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ et une matrice réelle diagonale par blocs D telle que $M = PDP^{-1}$.

V. Application

Dans cette partie, on suppose que $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ annule un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ à racines simples dans $\mathbb{C}$. On garde les notations introduites précédemment.

On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres réelles et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes non réelles de M.

Q 11. On pose $G = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)} \operatorname{sep}(M, \lambda)$ et $h = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}(M)} \operatorname{sep}(M, \lambda)$. Par convention, si M n'a pas de valeur propre réelle, alors $G = \{0\}$ et si M n'a que des valeurs propres réelles, alors $H = \{0\}$.

Montrez que G et H sont supplémentaires dans E_n et qu'ils sont stables par f.

On note g et h les endomorphismes induits par f dans G et H respectivement.

Q 12. Montrez qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E_n telle que $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}} f = R = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ où D est une matrice diagonale réelle et S une matrice diagonale par blocs $\operatorname{diag}(S(a_1, b_1), \ldots, S(a_m, b_m))$. On remarque que R est une matrice réelle.

Q 13. Un exercice classique : soit $(U, V) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$.

a) Justifiez que la fonction $x \mapsto \det(U + xV)$ est une fonction polynôme.

b) Montrez que s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\det(U + zV) \neq 0$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\det(U + xV) \neq 0$.

Application Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, on suppose que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: montrez qu'elles sont alors semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 14. Montrez finalement que M est semblable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice R.