

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$.

Les valeurs propres de f sont les scalaires λ pour lesquels on peut trouver un vecteur **non nul** v tel que $f(v) = \lambda v$. L'ensemble des valeurs propres de f est le spectre de f , noté $\text{Sp}(f)$.

Les sous-espaces propres de f sont les noyaux $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \text{sep}(f, \lambda)$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$. Ils sont tous de dimension au moins 1.

Les sous-espaces propres de f sont toujours en somme directe.

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique χ_f , l'ordre d'une valeur propre est son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_f .

Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité

f est diagonalisable **si et seulement si** l'une des conditions suivantes est vraie.

- Il existe une base de E constituée de n vecteurs propres de f .
- Il existe une base de E dans laquelle la matrice D de f est diagonale (dans ce cas, les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de D).
- Les sous-espaces propres de f sont supplémentaires dans E : $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \text{sep}(f, \lambda)$.
- La somme des dimensions des sous-espaces propres est n : $n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim \text{sep}(f, \lambda)$.
- Le polynôme **caractéristique** de f est scindé **ET** chaque sous-espace propre $\text{sep}(f, \lambda)$ a pour dimension l'ordre de la valeur propre λ .
- Le polynôme **minimal** de f est scindé **ET** à racines simples.
- Il existe un polynôme annulateur scindé **ET** à racines simples.

Conditions suffisantes de diagonalisabilité

Si l'une des conditions suivantes est vraie, **alors** f est diagonalisable.

- Le polynôme **caractéristique** de f est scindé **ET** à racines simples.
- La matrice de f dans une certaine base est **symétrique réelle**.

Conditions nécessaires et suffisantes de trigonalisabilité

f est trigonalisable **si et seulement si** l'une des conditions suivantes est vraie.

- Il existe une base de E dans laquelle la matrice T de f est triangulaire (dans ce cas, les valeurs propres de f sont les éléments diagonaux de T).
- Le polynôme **caractéristique** de f est scindé.
- Le polynôme **minimal** de f est scindé.
- Il existe un polynôme annulateur scindé.

Condition suffisante de trigonalisabilité

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, **alors** f est trigonalisable.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les valeurs propres de A sont les scalaires λ pour lesquels on peut trouver un vecteur-colonne **non nul** V tel que $AV = \lambda V$. L'ensemble des valeurs propres de A est le spectre de A , noté $\text{Sp}(A)$.

Les sous-espaces propres de A sont les noyaux $\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \text{sep}(A, \lambda)$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Ils sont tous de dimension au moins 1.

Les sous-espaces propres de A sont toujours en somme directe.

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique χ_A , l'ordre d'une valeur propre est son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_A .

Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité

A est diagonalisable **si et seulement si** l'une des conditions suivantes est vraie.

- Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de n vecteurs propres de A .
- Il existe des matrices $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ (dans ce cas, les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de D).
- Les sous-espaces propres de A sont supplémentaires dans $E : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \text{sep}(A, \lambda)$.
- La somme des dimensions des sous-espaces propres est $n : n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim \text{sep}(A, \lambda)$.
- Le polynôme **caractéristique** de A est scindé **ET** chaque sous-espace propre $\text{sep}(A, \lambda)$ a pour dimension l'ordre de la valeur propre λ .
- Le polynôme **minimal** de A est scindé **ET** à racines simples.
- Il existe un polynôme annulateur scindé **ET** à racines simples.

Conditions suffisantes de diagonalisabilité

Si l'une des conditions suivantes est vraie, **alors** A est diagonalisable.

- Le polynôme **caractéristique** de A est scindé **ET** à racines simples.
- A est **symétrique réelle**.

Conditions nécessaires et suffisantes de trigonalisabilité

A est trigonalisable **si et seulement si** l'une des conditions suivantes est vraie.

- Il existe des matrices $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et T triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$ (dans ce cas, les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de T).
- Le polynôme **caractéristique** de A est scindé.
- Le polynôme **minimal** de A est scindé.
- Il existe un polynôme annulateur scindé.

Condition suffisante de trigonalisabilité

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, **alors** A est trigonalisable.