

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

Dans tous les exercices de cette série, la lettre n désigne un entier naturel au moins égal à 2.

****1)**

- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, P non constant : on note a_1, \dots, a_m les racines distinctes de P et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ leurs ordres de multiplicité. Rappelez la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.
- Application : déterminez les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$. On rappelle que la décomposition en éléments simples est unique.
- Même question avec $f(P) = (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P$.

****2)** Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit l'application $\varphi(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\varphi(f)(0) = f(0) \text{ et pour tout } x \in]0, 1], \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

- Montrez que φ est un endomorphisme de E .
- Montrez que 0 n'est pas valeur propre de φ .
- Montrez que 1 est valeur propre et donnez le sous-espace propre associé.
- Déterminez les autres valeurs propres.

****3)** Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in K$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = \lambda M + \text{tr}(M)A$.

- Justifiez rapidement que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 2.
- Déduisez-en les éléments propres de f .
- À quelle condition l'endomorphisme f est-il inversible ?

****4)** (Matrices stochastiques)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **stochastique**, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

- Montrez que 1 est valeur propre de A .
- Montrez que toutes les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.
- On suppose que A est **strictement stochastique**, c'est-à-dire que A est stochastique et que ses coefficients sont strictement positifs. Montrez que 1 est la seule valeur propre de A de module 1.

****5)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = AM$.

Montrez que $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$. Pour toute valeur propre λ , donnez une relation entre les dimensions des sous-espaces propres $\text{sep}(f, \lambda)$ et $\text{sep}(A, \lambda)$.

****6)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que λ est une valeur propre complexe non réelle de A et X un vecteur propre complexe associé.

- Montrez que $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre complexe de A et que X n'est ni un vecteur propre réel, ni un vecteur propre imaginaire pur.
- Montrez qu'il existe $(U, V) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ tel que $F = \text{vect}(U, V)$ soit un plan et pour tout $Z \in F$, $AZ \in F$.

Application : montrez qu'un endomorphisme d'un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie possède soit une droite stable, soit un plan stable.

****7)** Soit $n \geq 2$, $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = U.U^T$. On note $U^T.U = (s)$ qui est une matrice carrée à un seul élément.

- Montrez que le polynôme $X^2 - sX$ est annulateur de A . Déduisez-en que A a au maximum deux valeurs propres.
- Quel est le rang de A ? Précisez les valeurs propres de A .
- Déterminez le polynôme caractéristique de A .
- Déterminez les sous-espaces propres de A .

****8)** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$, $A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \omega & \\ & & 0 \end{pmatrix}$,

- a) On pose J la matrice remplie de 1. Montrez que $t \mapsto \det(XI_n - A - tJ)$ est une fonction polynôme en t de degré au plus 1, puis calculez $\det(XI_n - A - tJ)$ en fonction de t .
- b) Montrez que le polynôme caractéristique de A est $\frac{1}{b-a}(b(X+a)^n - a(X+b)^n)$.
- c) Montrez que si $b = -a$, alors les images dans \mathbb{C} des valeurs propres de A sont sur une droite que vous préciserez, sinon elles sont sur un cercle.

***9)** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminez le polynôme caractéristique de A .
- b) Déduisez-en sans calcul supplémentaire que A est diagonalisable.
- c) Déterminez les sous-espaces propres de A .
- d) Diagonalisez A , c'est-à-dire explicitiez une matrice P inversible et une matrice D diagonales telles que $A = PDP^{-1}$.
- e) Calculez A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

***10)** Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

- a) Calculez efficacement le rang de B . Déduisez-en une valeur propre de B ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.
- b) Démontrez *sans calculer le polynôme caractéristique* que B admet une autre valeur propre, et qu'elle est simple.
- c) Déduisez-en le polynôme caractéristique de B .
- d) La matrice B est-elle diagonalisable? Si oui, donnez une base de vecteurs propres.

***11)** Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

***12)** Les matrices suivantes sont-elles semblables?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

***13)** Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

***14)** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas de la forme λI_2 .

Montrez que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et s.si $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$.

À quelle condition A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

****15)** Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

On recherche les (éventuelles) **racines carrées de A** , c'est-à-dire les matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.

- a) Montrez que A est diagonalisable et déterminez une matrice D diagonale semblable à A avec le moins de calculs possibles.
- b) Soit $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une racine carrée de D . Montrez que S et D commutent. Puis montrez que S est diagonale.

- c) Déterminez les racines carrées S de D .
d) Déduisez-en toutes les racines carrées R de la matrice A . Combien y en a-t-il? Pourquoi?
e) Énoncez des conjectures quant au nombre de racines carrées d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ plus générale, en discutant selon la nature de ses éléments propres.

****16)** Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Diagonalisez la matrice A .
b) On suppose que F est un sous-espace de \mathbb{R}^3 stable par u . Montrez que F est engendré par une famille de vecteurs propres de u .
c) Déterminez tous les sous-espaces de \mathbb{R}^3 stables par u : il y en a 8.

****17)** Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 2 \\ -6 & -18 & -5 \end{pmatrix}$:

- a) montrez que les droites stables par u sont les droites $\text{vect}((1, -1, 3))$ ou $\text{vect}((a, b, -a - 3b))$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;
b) montrez que les plans stables par u sont les plans d'équation $ax + (4a + 3b)y + (a + b)z$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et celui d'équation $x + 3y + z = 0$.

****18)** Montrez que les suites $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante sont combinaisons linéaires de 3 suites géométriques réelles (α^n) , (β^n) et (γ^n) : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = -\frac{5}{12}u_{n+2} + \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{12}u_n$.

Déterminez à quelle condition sur (u_0, u_1, u_2) ces suites sont convergentes.

****19)** Même exercice avec $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$ en prenant des suites géométriques complexes.

Montrez que les suites (u_n) sont combinaisons linéaires réelles de trois suites réelles simples que l'on précisera. Déterminez à quelle condition sur (u_0, u_1, u_2) ces suites sont convergentes.

****20)** Soit p un entier naturel non nul, E un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie et $f \in GL(E)$.

Montrez que f est diagonalisable si et seulement si f^p est diagonalisable.

Est-ce encore vrai si on remplace \mathbb{C} par \mathbb{R} ?

****21)** Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- a) Montrez que si f est diagonalisable, alors f^2 est diagonalisable et $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f)$.
b) Montrez que si λ est une valeur propre de f^2 non nulle et μ une racine carrée de λ , alors $\text{sep}(f^2, \lambda) = \text{Ker}(f - \mu \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \mu \text{Id})$.
c) Montrez que la réciproque du **a.** est vraie.

****22)** Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables? Donnez alors quand c'est possible une matrice triangulaire supérieure semblable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

****23)** Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminez le polynôme caractéristique de C . Est-elle diagonalisable? Trigonalisable?
b) Déterminez les éléments propres de C .
c) Montrez que la matrice C est semblable à la matrice T . On pourra considérer l'endomorphisme u canoniquement associé à C et construire, par analyse-synthèse, une base \mathcal{B} où la matrice de u est T .
d) Montrez que T peut s'écrire $D + N$, où D est diagonale, N est nilpotent et D et N commutent. Déduisez-en T^k , puis C^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.
e) On considère trois suites $(x_k), (y_k), (z_k)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{k+1} = 2x_k - 3y_k - z_k \\ y_{k+1} = x_k - 2y_k - z_k \\ z_{k+1} = -2x_k + 6y_k + 3z_k. \end{cases}$$

Explicitiez x_k, y_k, z_k en fonction de k et de x_0, y_0, z_0 .

- **24)** (Spectre d'un polynôme d'une matrice) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $Q \in \mathbb{K}[X]$.
- Montrez que la matrice $Q(M)$ est également diagonalisable. Exprimez le spectre de $Q(M)$ en fonction des valeurs propres de M .
 - Précisez les sous-espaces propres de $Q(M)$.
 - Ces résultats restent-ils valables si M est seulement trigonalisable? Sans hypothèse sur M ?
- **25)** Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $u^2 + u + \text{Id}_E = \mathbf{0}$.
- Soit F un sous-espace stable par u et $x \notin F$. Montrez que $\Pi_x = \text{vect}(x, u(x))$ est un plan, qu'il est stable par u et en somme directe avec F .
 - Montrez qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, de blocs $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Qu'en déduisez-vous concernant n ?
- On redémontre ce résultat d'une autre façon. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans une base de E .
- Montrez que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: donnez ses valeurs propres ainsi que la dimension des sous-espaces propres et retrouvez que n est pair.
 - Montrez qu'il existe une base de \mathbb{C}^n de la forme $(U_1, \overline{U_1}, \dots, U_{n/2}, \overline{U_{n/2}})$ constituée de vecteurs propres de A .
 - Soit U un vecteur propre complexe de A pour la valeur propre j . On pose $V = U + \overline{U}$ et $W = AV$. Vérifiez que $AW = -V - W$ et que V, W sont à coefficients réels.
 - Retrouvez que A est \mathbb{R} -semblable à une matrice diagonale par blocs, de blocs R .
- **26)** Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie. On note $C(f)$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes de E commutant avec f .
- Démontrez que $g \in C(f)$ si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g .
 - Déduisez-en que $\dim C(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \omega_\lambda^2$, où ω_λ désigne la multiplicité de la valeur propre λ .
 - On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Démontrez que $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $C(f)$.
- ***27)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que A est nilpotente si et s.si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{tr}(A^k) = 0$.
- ***28)** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$. Montrez que $A^{12} = I_2$.
- ***29)** Applications de la réduction des matrices à l'étude topologique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Montrez que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 - Montrez que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez la même chose avec l'ensemble $D_n^+(\mathbb{C})$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont distinctes. Montrez que l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est $D_n^+(\mathbb{C})$.
 - Montrez que $D_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Montrez que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé et qu'il est l'adhérence de $D_n(\mathbb{R})$.
- ***30)** Soit A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Montrez que si l'une des deux matrices est inversible, alors AB et BA ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.
 - Montrez que le résultat reste vrai même sans supposer l'une des deux inversibles.
- ***31)** On note comme d'habitude $(E_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle qu'une matrice de transvection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ où $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Montrez que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
 - Montrez que $GL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas.
 - Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrez qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et U_1, \dots, U_k k matrices de transvections telles que $D = \text{diag}(1, \dots, 1, \det A) = U_1 \dots U_k A$. Vous pourrez étudier plus finement les opérations effectuées lors d'un pivot de Gauss, voir cours de Première Année.
- Déduisez-en un chemin continu φ dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui relie A à D (i.e. $\varphi(0) = A$ et $\varphi(1) = D$) et qui laisse le déterminant invariant.
- Déterminez alors les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$.
- ***32)** On travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle matrice extraite de A toute matrice obtenue à partir de A en supprimant le même nombre de lignes et de colonnes (pas forcément les mêmes) : il s'agit donc d'une matrice carrée.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrez que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
 - $\text{rg } A = r$
 - il existe une matrice inversible extraite de A appartenant à $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et pour tout $s > r$, toute matrice extraite de A appartenant à $\mathcal{M}_s(\mathbb{K})$ n'est pas inversible.
 - Soit $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrez que l'ensemble des matrices de rang $\leq r$ est un fermé et qu'il est l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang égal à r .

Oraux de concours

- 1) **IMT** Soit u, v, w trois suites vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n$, $v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n$, $w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n$. Exprimez u_n, v_n, w_n en fonction de n, u_0, v_0, w_0 .
- 2) **IMT** Déterminez les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 3) **St-Cyr** Montrez que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donnez ses éléments propres.
- 4) **TPE** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$.
- Déterminez un polynôme annulateur de degré 3 de A .
 - La matrice A est-elle inversible?
 - Est-elle diagonalisable?
 - Montrez que les valeurs propres de A^2 sont négatives ou nulles.
- 5) **TPE** Montrez de deux façons différentes que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.
- 6) **IMT** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{n} & \sin \frac{\alpha}{n} \\ \sin \frac{\alpha}{n} & \cos \frac{\alpha}{n} \end{pmatrix}^n$.
- 7) **IMT** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 - 2A$ soit diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de A . Montrez que A est diagonalisable.
- 8) **CCINP**
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrez que $\text{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.
 - Pour $n \geq 3$, on pose A la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux situés sur les quatre bords, égaux à 1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
- 9) **CCINP** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A = (\alpha^{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Calculez le rang de A . Déduisez-en ses valeurs propres.
 - À quelle condition sur α la matrice A est-elle diagonalisable?
- 10) **CCINP** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = M + 2M^T$.
- Déterminez les valeurs et vecteurs propres de f .
 - L'endomorphisme f est-il diagonalisable? Calculez sa trace et son déterminant.
- 11) **Navale** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que 1 est la seule valeur propre de M si et s.si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{tr}(M^k) = n$.
- 12) **Navale**
- Diagonalisez la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Montrez que B et C sont semblables.
- 13) **CCINP** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.
- Exprimez le rang de B en fonction du rang de A .
 - Trouvez une relation entre χ_A et χ_B . Déduisez-en le spectre de B en fonction de celui de A .
 - Déterminez les dimensions des sous-espaces propres de b en fonction de celles des sous-espaces propres de A .
 - Montrez que B est diagonalisable si et s.si A est diagonalisable et inversible.

14) IMT Soit E un espace muni d'une base (e_1, \dots, e_n) , v un vecteur de E et f l'endomorphisme de E tel que $f(e_1) = \dots = f(e_n) = v$.

- Quel est le rang de f ?
- Discutez de la diagonalisabilité de f en fonction du vecteur v .

15) CCINP

a) Montrez que si deux matrices U et V sont semblables, alors pour tout polynôme R , $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.

Soit A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

- Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimez $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B .
- Montrez que si A est diagonalisable et B est nulle, alors M est diagonalisable.
- Montrez la réciproque.

16) CCMP

- Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$ et $\text{rg } A = \text{rg } B$. Montrez que A et B sont semblables.
- Le résultat subsiste-t-il avec les hypothèses $A^3 = B^3 = 0$ et $\text{rg } A = \text{rg } B$?

17) CCMP Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $(AB)^n = 0$. Montrez que $(BA)^n = 0$.

18) CCMP Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

- On suppose que $\text{vect}(u, v)$ contient un élément inversible. Montrez que $\text{Ker } u \cap \text{Ker } v = \{0\}$.
- Montrez que la réciproque du **a** est fautive.
- Montrez que si u et v commutent, alors la réciproque du **a** est vraie.

19) CCMP Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $u^3 = u^2$ et $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid u \circ v = v \circ u\}$.

Montrez que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminez sa dimension.

20) CCMP Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $M \mapsto M + \text{tr}(AM)A$.

- Étudiez la diagonalisabilité de φ .
- Calculez $\text{tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

21) CCMP Pour $c \in \mathbb{R}$, on pose $A(c) = \begin{pmatrix} -c & -1 & c \\ -1 & 1-c & 1 \\ c & -1 & -c \end{pmatrix}$.

- Déterminez les réels c tels que $A(c)$ ne soit pas diagonalisable.
- Soit d la plus petite de ces valeurs. Trouvez P inversible telle que $P^{-1}A(d)P$ soit triangulaire.

22) CCMP

- Soit $x = \cos \frac{2\pi}{5}$. Déterminez une équation du second degré à coefficients rationnels dont x est racine, puis donnez les valeurs de x et $\cos \frac{4\pi}{5}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$. On suppose que la trace de A est un rationnel. Montrez que 4 divise n .

23) CCMP Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrez que $\det(A) > 0$.

24) CCMP Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

25) CCMP Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$. On suppose que B est diagonalisable. Montrez que A est diagonalisable et que $I_n - A$ est inversible.

26) CCMP $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ inversible. Montrez que A est diagonalisable.

27) CCMP Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,i} = 0$ et $a_{i,j} = i$ si $i \neq j$.

- Montrez qu'un réel λ est valeur propre de A si et s.si $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+\lambda} = 1$.
- Montrez que A est diagonalisable. Listez ses valeurs propres avec un encadrement le plus précis possible.
- Déterminez la somme des valeurs propres de A . On note μ_n la plus grande d'entre elles. Trouvez $C \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_n \sim Cn^2$ quand n tend vers l'infini.

28) CEN À quelles conditions $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Le cas échéant, diagonalisez A .

29) CEN Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$.

- Donnez un vecteur propre évident de A .
- Calculez le polynôme caractéristique de A et donnez son spectre. Justifiez que A est diagonalisable.
- Exprimez lorsqu'elle existe la matrice inverse A^{-1} en fonction de I_4, A, A^2 et A^3 .

30) CEN Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

- Montrez qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$.
- Montrez que $BA = 0$.
- Réciproquement, soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $B^n = BA = 0$. Montrez que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

31) CEN Soit $\theta_1, \dots, \theta_p$ des réels distincts modulo 2π et m_1, \dots, m_p des complexes non nuls. Le but de l'exercice est de montrer que la suite $(m_1 e^{i\theta_1 n} + \dots + m_p e^{i\theta_p n})$ ne converge pas vers 0.

Par l'absurde, on suppose que $m_1 e^{i\theta_1 n} + \dots + m_p e^{i\theta_p n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

a) On note $M_n = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1 n} & \dots & e^{i\theta_p n} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i\theta_1(n+p-1)} & \dots & e^{i\theta_p(n+p-1)} \end{pmatrix}$. Montrez que $Y_n = M_n \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

- Montrez que $|\det M_n|$ est une constante non nulle.
- À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, exprimez M^{-1} et trouvez une contradiction.

32) ENS On considère un automorphisme α de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le produit matriciel c'est-à-dire tels que $\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Montrer que $\alpha(I_n) = I_n$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que $\alpha(A)$ l'est aussi.
- On suppose que A est semblable à une matrice diagonale D à coefficients diagonaux tous distincts. Montrer que $\alpha(A)$ est elle aussi semblable à D .
- Justifier l'existence de $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(D) = PDP^{-1}$ puis montrer que $\alpha(E) = PEP^{-1}$ pour toute matrice diagonale E .
- Déterminer α .