On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n + (1-x)^n}{n^2}$.

Q 1. Montrer que la série $\sum f_n(x)$ converge si et seulement si $x \in [0, 1]$.
On pourra s'intéresser au cas où n est pair.

On pose donc $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ quand $x \in [0, 1]$.

Q 2. Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.

Q 3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, 1[$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Q 4. Exprimer enfin $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Q 5. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\, 2^n}$.

Exercice hebdomadaire 9 - Corrigé

Q 1. Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^n + |1-x|^n}{n^2} \leqslant \dfrac{2}{n^2}$, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum f_n(x)$ converge absolument.

Pour tout $x > 1$, $f_{2n}(x) \geqslant \dfrac{x^{2n}}{4n^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{2n}(x) = +\infty$: la série $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.

De même, si $x < 0$, $f_{2n}(x) \geqslant \dfrac{(1-x)^{2n}}{4n^2}$, or $1 - x > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{2n}(x) = +\infty$: la série $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.

Q 2. La question précécente a montré que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$. Or toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$, donc d'après le th. de continuité du cours, f est continue sur $[0,1]$.

Q 3. Pour $x \in [0,1]$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} = g(x) + g(1-x)$, en posant $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

g est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1 donc d'après le cours, g est de classe C^1 sur $]0,1[$. Puis $x \mapsto g(1-x)$ l'est aussi par composition de fonctions de classe C^1. Donc f l'est aussi par opérations sur les fonctions de classe C^1.

De plus, pour tout $x \in\,]0,1[$, $f'(x) = g'(x) - g'(1-x)$. Or $g'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x} \times \Big(-\ln(1-x)\Big)$.

Donc $f'(x) = \dfrac{-1}{x}\ln(1-x) + \dfrac{1}{1-x}\ln x$.

Q 4. On calcule une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(1-x)$ par intégration par parties :

d'abord, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}\ln(1-t)$ est continue sur $]0,1[$ et $\dfrac{1}{t}\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-t}{t}$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\ln(1-t) = -1$ (fausse singularité en 0), donc cette fonction est intégrable sur $]0,x]$ pour tout $x \in\,]0,1[$;

ensuite pour $x \in\,]0,1[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1-t)\,\mathrm{d}t = [\ln(t)\ln(1-t)]_{t=0}^x + \int_0^x \frac{1}{1-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$ (l'intégration par parties est licite car les deux intégrales convergent : $\dfrac{1}{1-t}\ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$ et on sait que ln est intégrable sur $]0,1]$)

donc (miracle !) $\displaystyle\int_0^x \left(\frac{-1}{t}\ln(1-t) + \frac{1}{1-t}\ln t\right)\mathrm{d}t = -\ln(x)\ln(1-x)$ (car $\ln(t)\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t\ln t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$),

c'est-à-dire $f(x) - f(0) = -\ln(x)\ln(1-x)$, or $f(0) = \dfrac{\pi^2}{6}$, donc $f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$.

Rem : cette expression présente de fausses singularités en 0 et en 1, car $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)\ln(1-x) = 0 = \lim\limits_{x\to 1} \ln(x)\ln(1-x)$, autrement dit à prolongement par continuité près, elle est encore valable en 0 et en 1.

Rem bis : ou alors on est plus attentif que moi et on repère tout de suite que f' est la dérivée du produit $x \mapsto -\ln(x)\ln(1-x)$, ce que je n'avais pas vu tout de suite !

Q 5. En particulier, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = \frac{\pi^2}{6} - (\ln 2)^2$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\, 2^n} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.