Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$.

Q 1. Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer son spectre.

Q 2. Justifier qu'en dehors de deux cas particuliers, il est certain que A est diagonalisable.

Q 3. Étudier la diagonalisabilité de A dans chacun des deux cas particuliers.

Q 4. Déterminer les sous-espaces propres dans chacun des cas.

Q 5. Dans le cas où $a = 0$, montrer que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q 6. Montrer que dans tous les cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}(A^n) = 1 + (-1)^n + (1+a)^n$.

Exercice hebdomadaire 8 - Corrigé

Q 1. $\chi_A = \begin{vmatrix} X & 1 & -1 \\ 1 & X & 1 \\ -1 & -1 & X-1-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ 1-X & X & 1 \\ 0 & -1 & X-1-a \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & X & 1 \\ 0 & -1 & X-1-a \end{vmatrix}$

$= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & -1 & X-1-a \end{vmatrix} = (X-1)(X+1)(X-1-a)$

donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1, 1+a\}$.

Q 2. Si $a \neq 0$ et $a \neq -2$, alors les trois valeurs propres sont distinctes donc A est diagonalisable.

Q 3. Si $a = 0$, alors A a deux valeurs propres 1 d'ordre 2 et -1 d'ordre 1. Or $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2 (deux colonnes identiques et la troisième non colinéaire aux deux autres), donc $\dim \mathrm{sep}(A, 1) = 3 - 2 = 1$: la dimension du sous-espace propre $\mathrm{sep}(A, 1)$ n'est pas égale à l'ordre de la valeur propre 1, donc A n'est pas diagonalisable.

Si $a = -2$, alors A a deux valeurs propres 1 d'ordre 1 et -1 d'ordre 2. De même, on vérifie que $\dim \mathrm{sep}(A, -1) = 1$, donc A n'est pas diagonalisable.

Q 4. Si $a \notin \{0, -2\}$, alors on résout les systèmes $AV = V$, $AV = -V$ et $AV = (1+a)V$, qui ont pour ensemble de solutions des droites vectorielles, puisque les trois valeurs propres sont d'ordre 1.

On trouve après calculs : $\mathrm{sep}(A, 1) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{sep}(A, -1) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 3+a \\ 1+a \\ -2 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{sep}(A, 1+a) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}\right)$.

Si $a = 0$, alors $\mathrm{sep}(A, 1) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{sep}(A, -1) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

Si $a = -2$, alors $\mathrm{sep}(A, 1) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{sep}(A, -1) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

Q 5. On cherche une matrice P inversible telle que $T = P^{-1}AP$, c'est-à-dire telle que $PT = AP$. On constate que la première colonne de P doit être un vecteur propre V_1 pour la valeur propre -1 et la seconde un vecteur propre V_2 pour la valeur propre 1.

On choisit par exemple $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & u \\ 1 & 1 & v \\ -2 & 0 & w \end{pmatrix}$. La troisième colonne de P vérifie alors l'équation $AV_3 = V_3 + V_2$: on résout et on choisit une des solutions, par exemple $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On essaye donc $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie qu'elle est bien inversible (de déterminant -4) et que $PT = AP$ donc A et T sont semblables.

Q 6. On constate que dans le cas $a = -2$, A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (je ne refais pas les calculs).

Dans tous les cas,

A est semblable à une matrice diagonale ou triangulaire supérieure dont la diagonale est $(1, -1, 1+a)$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est semblable à une matrice diagonale ou triangulaire supérieure dont la diagonale est $(1, (-1)^n, (1+a)^n)$. Or deux matrices semblables ont la même trace, donc $\mathrm{tr}(A^n) = 1 + (-1)^n + (1+a)^n$.