

1 Espaces préhilbertiens

- a) Produit scalaire sur un \mathbb{R} -espace vectoriel : définition, exemples fondamentaux. Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens. Norme euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwarz. Orthogonalité de vecteurs, th. de Pythagore.
- b) Familles orthogonales, familles orthonormées. Liberté d'une famille orthogonale sans vecteur nul. Existence de bases orthonormées d'un espace euclidien, algorithme de Gram-Schmidt d'orthogonalisation/orthonormalisation d'une base. Intérêt des bases orthonormées pour la simplicité des calculs.
- c) Sous-espaces orthogonaux. Des sous-espaces orthogonaux deux à deux sont en somme directe. Orthogonal d'un sous-espace, orthogonal d'un vecteur.
- d) Si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et F^\perp sont supplémentaires. Projection orthogonale d'un vecteur sur un tel sous-espace (calcul effectif), projecteur orthogonal, propriétés remarquables des projecteurs orthogonaux.
- e) Distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie, calcul effectif.

2 Espaces euclidiens

- a) Représentation des formes linéaires d'un espace euclidien par un produit scalaire.
- b) Adjoint d'un endomorphisme, définition, unicité, matrice dans une base orthonormée. Propriétés usuelles, dont stabilité par l'adjoint de l'orthogonal d'un s.e.v. stable.
- c) Orientation d'un \mathbb{R} -e.v. (présentation succincte).
- d) Isométries vectorielles ou automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien : définition (conservation de la norme), diverses caractérisations (conservation du produit scalaire, transformation d'une base orthonormée en base orthonormée, l'adjoint est l'inverse). Groupe orthogonal.
- e) Matrices orthogonales, lien avec les isométries vectorielles. Déterminant d'une matrice orthogonale, groupe spécial orthogonal. Changements de bases orthonormées. Produit mixte en dimension quelconque, produit vectoriel en dimension 3.
- f) Étude en dimension 2, détermination des isométries vectorielles.
- g) Réduction des isométries vectorielles. Définition de matrices orthosemblables.
- h) Étude en dimension 3. En fonction de la dimension du sous-espace des vecteurs invariants, nature des isométries vectorielles : réflexions, rotations (et antirotations : hors-programme). Détermination de l'axe orienté et de l'angle associé dans le cas d'une rotation. Caractérisation des rotations par le déterminant.
- i) Endomorphismes auto-adjoints, lien avec les matrices symétriques. Stabilité du supplémentaire orthogonal d'un s.e.v. stable par un endomorphisme symétrique, orthogonalité deux à deux des sous-espaces propres. Matrices orthodiagonalisables, matrices orthosemblables. Théorème spectral. Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis-positifs, caractérisation par le spectre.