

1 Séries entières

- a) Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence R d'une série entière ; si $|z| < R$, il y a convergence absolue de la série entière, si $|z| > R$, divergence grossière et indétermination quand $|z| = R$. Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.
- b) Calcul ou estimation du rayon de convergence : diverses idées pour calculer le rayon, entre autres, la règle de d'Alembert. Comparaison de séries entières. Somme, produit de Cauchy de séries entières. Invariance du rayon de convergence par produit des coefficients par un polynôme en n .
- c) Convergence normale sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence. Continuité de la somme dans le disque ouvert de convergence. Caractère C^∞ de la somme d'une série entière dans l'intervalle ouvert de convergence, dérivation, intégration terme à terme d'une série entière. Th. de convergence radiale d'Abel.
- d) Fonctions développables en série entière, série de Taylor d'une fonction C^∞ , opérations sur les fonctions développables en série entière, unicité du d.s.e. Développements des fonctions usuelles.

2 Espaces préhilbertiens

- a) Produit scalaire sur un \mathbb{R} -espace vectoriel : définition, exemples fondamentaux. Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens. Norme euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwarz. Orthogonalité de vecteurs, th. de Pythagore.
- b) Familles orthogonales, familles orthonormées. Liberté d'une famille orthogonale sans vecteur nul. Existence de bases orthonormées d'un espace euclidien, algorithme de Gram-Schmidt d'orthogonalisation/orthonormalisation d'une base. Intérêt des bases orthonormées pour la simplicité des calculs.
- c) Sous-espaces orthogonaux. Des sous-espaces orthogonaux deux à deux sont en somme directe. Orthogonal d'un sous-espace, orthogonal d'un vecteur.
- d) Si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et F^\perp sont supplémentaires. Projection orthogonale d'un vecteur sur un tel sous-espace (calcul effectif), projecteur orthogonal, propriétés remarquables des projecteurs orthogonaux.
- e) Distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie, calcul effectif.