

Sujet inspiré par Centrale 2004 MP.

Problème 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose quand c'est possible

$$F(x) = \int_0^1 t^{x-2} \ln(t) \ln(1-t) dt$$

I. Calculs de sommes

On admet le résultat suivant : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On pose $S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, $S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$ et $S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-\frac{1}{2})^2}$.

Q 1. Montrer l'existence de ces trois sommes. Donner la valeur de S_1 .

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$ quand c'est possible.

Q 2. Donner l'ensemble de définition de L et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Q 3. On pose $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$. Justifier l'existence de I et la calculer par intégration par parties.

Q 4. Donner la valeur de S_2 .

Q 5. Exprimez S_3 à l'aide de S_1 et S_2 puis donner sa valeur.

II. Étude de la fonction F

Q 6.

a) Montrer que pour tout $\alpha \geq 1$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$ diverge. On pourra commencer par le cas $\alpha = 1$.

b) Montrer que pour tout $\alpha < 1$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$ converge.

c) Pour $a > -1$, donner la valeur de $\int_0^1 t^a \ln t dt$.

Q 7. Donner l'ensemble de définition de F .

Q 8. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

Q 9. Déterminer la limite de F en 0.

Q 10. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

III. Un développement en série entière

On pose $G(x) = \int_0^1 t^x \ln(t) dt$ pour $x \in]-1, 1[$.

Q 11. On pose φ la fonction $t \mapsto \left(1 + \frac{\ln(1-t)}{t}\right) \ln(t)$. Montrer qu'on peut prolonger φ par continuité sur $[0, 1]$ et que

$t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Q 12. Montrer que $F(x+1) + G(x)$ a une limite réelle quand x tend vers 0.

Q 13. Pour $t \in]0, 1[$, développer en série entière la fonction $x \mapsto t^x$. Montrer que la fonction $x \mapsto F(x+1)$ est développable en série entière au voisinage de 0 en précisant le rayon de convergence R .

On pose $F(x+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ pour $|x| < R$.

Q 14. Montrer que $c_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^k (k+1)$. Qu'en est-il de la convergence au bord de la série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$?

IV. Développement en série de F et conséquences

Q 15. Rappeler sans démonstration le développement en série entière de $\ln(1-t)$, ainsi que celui de $\frac{1}{(1-t)^2}$.

Q 16. Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+1)}$.

Q 17. Calculer $F(2)$, $F(\frac{1}{2})$.

Q 18. Montrer que F est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Q 19. Montrer le développement asymptotique suivant :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{6} - 1 + o(1)$$

Q 20. On pose $H : x \mapsto F(x) - \frac{1}{x^2}$. Justifier que H est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$.

Q 21. Montrer ensuite que H est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et exprimer les coefficients du développement à l'aide des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+2}(n+1)}$.

Q 22. Montrer que F est intégrable sur $[X, +\infty[$ pour tout $X > 0$ et calculer $\int_X^{+\infty} F(x) dx$ sous la forme d'une série.

F est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

Q 23. Montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2}$.

Problème 1

I.

Q 1. Quand $k \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1}{4k^2}$, $\frac{1}{(k+1)(2k+1)} \sim \frac{1}{2k^2}$ et $\frac{1}{k(k-\frac{1}{2})^2} \sim \frac{1}{k^3}$, donc par comparaison de séries à termes positifs (TCPST) à des séries de Riemman convergentes (les exposants sont strictement supérieurs à 1), les trois séries convergent.

La série $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série à termes positifs donc on peut effectuer des sommations par paquets :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + S_1 \text{ donc } S_1 = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Q 2. La série entière $\sum \frac{x^{2n}}{n+1}$ a même rayon de convergence que la série géométrique $\sum x^{2n}$, qui vaut 1, donc f , comme somme d'une série entière, est définie au moins sur $] -1, 1[$ et au plus sur $[-1, 1]$. Or si $x = 1$ ou $x = -1$, la série $\sum \frac{x^{2n}}{n+1}$ est la série harmonique donc diverge. Donc l'ensemble de définition de f est $] -1, 1[$.

On sait que le développement en série entière (d.s.e.) de la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$ est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, valable si $x \in] -1, 1[$,

$$\text{donc dans ce cas, } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} = -\ln(1-x^2), \text{ i.e. } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{n+1} = -\ln(1-x^2),$$

$$\text{donc pour } x \in] -1, 0[\cup] 0, 1[, L(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{n+1} = \frac{-\ln(1-x^2)}{x^2} \text{ et } L(0) = 1.$$

Q 3. La fonction L est continue sur $] -1, 1[$ comme somme d'une série entière de rayon de convergence 1. Et quand $x \rightarrow 1$, $L(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \sim -\ln(1-x)$, or \ln est intégrable sur $] 0, 1[$, donc L l'est aussi sur $] 0, 1[$, donc l'intégrale $I = -\int_0^1 L$ converge.

Une primitive de \ln est $x \mapsto x \ln x - x$ sur $] 0, +\infty[$, donc sous réserve de convergence,

$$I = \left[\frac{-1}{x} \ln(1-x^2) \right]_{x=0}^1 - \int_0^1 \left(\frac{-2x}{1-x^2} \right) \times \left(\frac{-1}{x} \right) dx = \left[\frac{-1}{x} \ln(1-x^2) \right]_{x=0}^1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx \dots$$

et zut ! la deuxième intégrale est divergente ! Alors on modifie le raisonnement en changeant la borne 1 en une borne $X < 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx &= \left[\frac{-1}{x} \ln(1-x^2) \right]_{x=0}^X - 2 \int_0^X \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{-1}{X} \ln(1-X^2) - \int_0^X \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{-1}{X} \ln(1-X^2) + \ln(1-X) - \ln(1+X) = \left(1 - \frac{1}{X} \right) \ln(1-X) - \left(1 + \frac{1}{X} \right) \ln(1+X) \\ &= \frac{(X-1) \ln(1-X)}{X} - \frac{X+1}{X} \ln(1+X) \xrightarrow{X \rightarrow 1} -2 \ln 2 \end{aligned}$$

Donc

$$I = -2 \ln 2$$

Q 4. On pose $M(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(k+1)(2k+1)}$ de sorte que $S_2 = M(1)$. Le rayon de convergence de cette série entière est 1

donc M est dérivable sur $] 0, 1[$ et sa dérivée est la fonction $M' : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k+1)x^{2k}}{(k+1)(2k+1)}$, i.e. $M' = L$.

De plus, d'après le th. de convergence radiale, M est continue sur $] 0, 1[$, donc $M(1) = \int_0^1 L = -I = 2 \ln 2$.

Q 5. On remarque que $S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n - \frac{1}{2})^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k + \frac{1}{2})^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(k+1)(2k+1)^2}$

et aussi que $\frac{1}{(k+1)(2k+1)^2} = \frac{2}{(2k+1)^2} - \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$, donc $S_3 = 4(2S_1 - S_2) = 8S_1 - 4S_2 = \pi^2 - 8 \ln 2$.

II.

Q 6.

a) Pour $\alpha = 1$, pour tout $x > 0$, $\int_x^1 \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_{t=x}^1 = \frac{-1}{2} (\ln x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$. Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{t} dt$ diverge.

De plus, si $\alpha \geq 1$, alors comme $t \in]0, 1]$, $t^\alpha \leq t$ et $-\ln t \geq 0$, donc $0 \leq \frac{-\ln t}{t} \leq \frac{-\ln t}{t^\alpha}$: par comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$ diverge.

b) Soit $\alpha < 1$. On choisit alors un réel β tel que $\alpha < \beta < 1$, de sorte que $t^{\beta-\alpha} \ln t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ par comparaison asymptotique classique, donc $\frac{\ln t}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$. Or $\beta < 1$ donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc par comparaison, la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^\alpha}$ est aussi intégrable sur $]0, 1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$ converge.

c) Soit $a > -1$, alors $\int_0^1 t^a \ln t dt = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^{-a}} dt$ converge d'après ce qui précède. Sous réserve de convergence, on effectue une intégration par parties :

$$\int_0^1 t^a \ln t dt = \left[\frac{t^{a+1}}{a+1} \ln t \right]_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{t^{a+1}}{a+1} \times \frac{1}{t} dt$$

La seconde intégrale est $\frac{1}{a+1} \int_0^1 \frac{1}{t^{-a}} dt$, qui converge puisque $-a < 1$, donc l'intégration par parties est licite. On a alors

$$\int_0^1 t^a \ln t dt = - \int_0^1 \frac{t^a}{a+1} dt = -\frac{1}{(a+1)^2}$$

Q 7. La fonction $f_x : t \mapsto t^{x-2} \ln t \ln(1-t)$ est continue sur $]0, 1[$.

Quand $t \rightarrow 0$, $f_x(t) \sim t^{x-2} \ln t \times (-t) = -\frac{\ln t}{t^{1-x}}$: par comparaison d'intégrales de fonctions positives, d'après la question précédente, on en déduit que $\int_0^{1/2} f_x$ converge si et seulement si $1-x < 1$, i.e. $x > 0$.

Quand $t \rightarrow 1$, $f_x(t) \sim (t-1) \ln(1-t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0$ car $\ln t \sim t-1$: on a une fausse singularité en 1, donc l'intégrale $\int_{1/2}^1 f_x$ converge toujours.

Conclusion : $F(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. L'ensemble de définition de F est donc $]0, +\infty[$.

Q 8. On remarque que pour tout $t \in]0, 1[$, $\ln t \ln(1-t) > 0$, donc les fonctions f_x sont positives sur $]0, 1[$: comme leurs intégrales de 0 à 1 convergent, elles sont donc intégrables sur $]0, 1[$.

De plus, pour tout $x \geq 2$, $t^{x-2} \leq 1$, donc $0 \leq f_x(t) \leq \ln t \ln(1-t) = f_2(t)$ et on a montré que f_2 est intégrable sur $]0, 1[$: il s'agit donc d'une hypothèse de domination quand $x \geq 2$.

Or pour tout $t \in]0, 1[$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} t^{x-2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_x(t) = 0$.

D'après le th. de convergence dominée, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^1 0 dt = 0$.

Q 9. Pour tout $x > 0$ et $t \in]0, 1[$, $\ln(1-t) \leq -t$ et $\ln t < 0$, donc $\ln t \ln(1-t) \geq -t \ln t$ donc $f_x(t) \geq -t^{x-1} \ln t$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $F(x) \geq - \int_0^1 t^{x-1} \ln t dt = \frac{1}{x^2}$ d'après **Q 6 c.** Donc par th. d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = +\infty$.

Q 10. On note $\phi : (x, t) \mapsto t^{x-2} \ln t \ln(1-t)$ sur $D =]0, +\infty[\times]0, 1[$. Cette fonction est clairement de classe C^1 sur D par opérations et composition de fonctions de classe C^1 et $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) = t^{x-2} (\ln t)^2 \ln(1-t)$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$ et $t \in]0, 1[$, $0 \leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right| \leq t^{a-2} (\ln t)^2 |\ln(1-t)| = \varphi(t)$.

Or φ est intégrable sur $]0, 1[$: comme en question **Q 7**, on a une fausse singularité en 1 et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{(\ln t)^2}{t^{1-a}} \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-b}}\right)$ si on choisit $0 < b < a$, or $t \mapsto \frac{1}{t^{1-b}}$ est alors intégrable sur $]0, 1[$.

On a donc trouvé une hypothèse de domination sur $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$ pour $x \geq a$.

D'après le th. de dérivation sous le signe intégral, F est donc de classe C^1 sur $[a, +\infty[$. Donc par réunion d'intervalles, F l'est aussi sur $]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$.

De plus, pour tout $x > 0$, $F'(x) = \int_0^1 t^{x-2} (\ln t)^2 \ln(1-t) dt$.

III.

Q 11. $\ln(1-t) = -t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ quand $t \rightarrow 0$, donc $1 + \frac{\ln(1-t)}{t} = -\frac{1}{2}t + o(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t}{2}$ donc $\varphi(t) \sim \frac{-t \ln t}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

On peut donc prolonger φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$.

Enfin, quand $t \rightarrow 1$, $\ln t \sim (t-1)$ et $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(1-t)}{t} = -\infty$ donc $1 + \frac{\ln(1-t)}{t} \sim \frac{\ln(1-t)}{t} \sim \ln(1-t)$

donc $\varphi(t) \sim (t-1) \ln(1-t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0$: on peut prolonger φ par continuité en 1 en posant $\varphi(1) = 0$.

De plus, $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}$ est continue sur $]0, 1[$ et $\frac{\varphi(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{2} \ln t$, or \ln est intégrable sur $]0, 1[$ donc $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}$ l'est aussi sur $]0, 1[$.

Q 12. $F(x+1) + G(x) = \int_0^1 t^{x-1} \ln t \ln(1-t) dt + \int_0^1 t^x \ln(t) dt = \int_0^1 t^x \varphi(t) dt$.

Pour tout $t \in]0, 1[$, $\lim_{x \rightarrow 0} t^x \varphi(t) = \varphi(t)$.

Pour tout $t \in]0, 1[$ et $x \in]-1, +\infty[$, $|t^x \varphi(t)| = e^{x \ln t} |\varphi(t)| \leq e^{-\ln t} |\varphi(t)| = \frac{|\varphi(t)|}{t}$ et $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (hypothèse de domination).

D'après le th. de convergence dominée, $\lim_{x \rightarrow 0} F(x+1) + G(x) = \int_0^1 \varphi(t) dt$.

Q 13. Pour $t \in]0, 1[$, $t^x = e^{x \ln t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x \ln t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln t)^k}{k!} x^k$ (rayon de convergence $+\infty$).

Donc pour $x \in]-1, 1[$, $F(x+1) + G(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(\ln t)^k}{k!} \varphi(t) x^k \right) dt$: on veut intervertir \sum et \int .

On pose $\varphi_k : t \mapsto \frac{(\ln t)^k}{k!} x^k \varphi(t)$.

φ est continue sur le segment $[0, 1]$ donc elle est bornée sur ce segment : on pose $M = \sup_{[0,1]} |\varphi|$.

Pour tout $k \geq 0$ et $t \in]0, 1[$, $|\varphi_k(t)| \leq \frac{|\ln t|^k}{k!} |x|^k M$ et $t \mapsto (\ln t)^k$ est intégrable sur $]0, 1[$, car négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0, donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives, φ_k est intégrable sur $]0, 1[$.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |\varphi_k| \leq \frac{M|x|^k}{k!} \int_0^1 |\ln t|^k dt = \frac{M|x|^k}{k!} \int_0^{+\infty} |u|^k e^{-u} du$ (changement de variable $t = e^{-u}$).

Or $\int_0^{+\infty} |u|^k e^{-u} du = k!$ (résultat classique), donc $\int_0^1 |\varphi_k| \leq M|x|^k$. Comme la série $\sum |x|^k$ converge (car $|x| < 1$),

on en déduit par TCSTP que la série $\sum_{k \geq 0} \int_0^1 |\varphi_k|$ converge.

Alors d'après le th. d'intégration terme à terme, on en déduit $F(x+1) + G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{k!} \varphi(t) dt \right) x^k$.

Ceci prouve que $x \mapsto F(x+1) + G(x)$ est développable en série entière que $] -1, 1[$ et on ne peut pas faire mieux car $x \mapsto F(x+1)$ est définie sur $] -1, +\infty[$: le rayon de convergence R est donc 1.

Enfin, G est développable en série entière sur $] -1, 1[$, car si $|x| < 1$, $G(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} (k+1) x^k$.

Donc $F(x+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{k!} \varphi(t) dt + (-1)^k (k+1) \right) x^k$ pour $|x| < 1$.

Q 14. D'après ce qui précède, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{k!} \varphi(t) dt + (-1)^k (k+1)$.

Or il a aussi été montré que $\left| \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{k!} \varphi(t) dt \right| \leq \int_0^1 \frac{|\ln t|^k}{k!} |\varphi(t)| dt \leq M \int_0^1 \frac{|\ln t|^k}{k!} dt = M$,

alors que $|(-1)^k (k+1)| = k+1 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc $c_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^k (k+1)$.

Donc les séries $\sum_{k \geq 0} c_k$ et $\sum_{k \geq 0} c_k (-1)^k$ divergent grossièrement.

IV.

Q 15. Pour tout $t \in] -1, 1[$, $\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k}$ et $\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)t^k$.

Q 16. Pour $x > 0$, $F(x) = \int_0^1 t^{x-2} \ln t \ln(1-t) dt = -\int_0^1 t^{x-2} \ln t \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \right) dt = -\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{x+k-2} \ln t}{k} \right) dt$

donc $F(x) = -\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{x+n-1} \ln t}{n+1} \right) dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto \frac{t^{x+n-1} \ln t}{n+1}$, fonction intégrable sur $]0, 1[$ (car $x+n-1 > -1$: voir question **Q 6**).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n| = \frac{-1}{n+1} \int_0^1 t^{x+n-1} \ln t dt = \frac{1}{(n+1)} \times \frac{1}{(n+x)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$ (toujours d'après **Q 6**).

Donc la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n|$ converge : d'après le th. d'intégration terme à terme, $F(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+x)^2}$.

Q 17. $F(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^2}$
 $= 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

$F(\frac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+\frac{1}{2})^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n-\frac{1}{2})^2} = S_3 = \pi^2 - 8 \ln 2$.

Q 18. On pose $u_n : x \mapsto \frac{1}{(n+1)(n+x)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$: c'est une fonction de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_n^{(k)}(x) = \frac{-1)^k (k+1)!}{(n+1)(n+x)^{k+2}}$ donc $|u_n^{(k)}(x)| \leq \frac{(k+1)!}{n^{k+3}}$ et la série $\sum \frac{1}{n^{k+3}}$ converge, donc les séries $\sum_{n \geq 0} u_n^{(k)}$ convergent normalement, donc uniformément, sur $]0, +\infty[$.

D'après le th. de dérivation terme à terme, F est de classe C^∞ .

Q 19. $F(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+1)}$ d'après **Q 16**.

Or la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ est normalement convergente sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} u_n(x) = \frac{1}{n^2(n+1)}$,

donc d'après le th. de la double limite, $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2} \right) = -1 + \frac{\pi^2}{6}$.

Donc $F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{6} - 1 + o(1)$.

Q 20. On reprend l'idée de **Q 18** mais à partir du rang $n = 1$, car $H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Pour $n \geq 1$, les fonctions u_n sont en fait de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$ et encore une fois, il y a convergence normale des dérivées k -èmes sur $] -1, +\infty[$.

Q 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in] -1, 1[$, $\left| \frac{x}{n} \right| \leq |x| < 1$

donc $u_n(x) = \frac{1}{(n+1)n^2} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2} = \frac{1}{(n+1)n^2} \times \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \left(\frac{-x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(k+1)}{n^{k+2}(n+1)} x^k$,

donc $H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k(k+1)}{n^{k+2}(n+1)} x^k$. On veut intervertir les deux symboles \sum . Pour cela, on étudie la sommabilité de la famille $\left(\frac{(-1)^k(k+1)}{n^{k+2}(n+1)} x^k \right)_{1 \leq n, 0 \leq k}$.

$S = \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}} \left| \frac{(-1)^k(k+1)}{n^{k+2}(n+1)} x^k \right| = \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}} \frac{(k+1)}{n^{k+2}(n+1)} |x|^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)}{n^{k+2}(n+1)} |x|^k$ d'après le th. de Fubini sur les familles positives.

Donc $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{|x|^k}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \frac{1}{\left(1 - \frac{|x|}{n}\right)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{(n^2 - |x|)^2} < +\infty$ (somme

d'une série positive convergente), donc la famille est sommable, on peut intervertir les symboles par le th. de Fubini :

$H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k(k+1)}{n^{k+2}(n+1)} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k(k+1) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+2}(n+1)} \right) x^k$,

ce qui prouve que H est d.s.e. sur $] -1, 1[$.

Q 22. Soit $X > 0$. Sur $[X, +\infty[$, les fonctions u_n sont intégrables car $u_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

De plus, $\int_X^{+\infty} |u_n(x)| dx = \frac{1}{n+1} \int_X^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} dx = \frac{1}{(n+1)(n+X)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n \geq 0} \int_X^{+\infty} |u_n|$ converge.

D'après le th. d'intégration terme à terme, F est intégrable sur $[X, +\infty[$ et $\int_X^{+\infty} F(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+X)}$.

F n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ car $F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$ d'après **Q 19**.

Q 23. Comparaison série-intégrale : à x fixé ($x > 1$), $t \mapsto \frac{1}{(t+1)(t+x)^2}$ est positive, décroissante et continue sur $[0, +\infty[$,

donc pour tout $n \geq 0$, $\frac{1}{(n+2)(n+1+x)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{(t+1)(t+x)^2} dt \leq \frac{1}{(n+1)(n+x)^2}$

donc en additionnant de $n = 0$ à $+\infty$: $F(x) - \frac{1}{x^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+x)^2} dt \leq F(x)$.

En utilisant une déc. en éléments simples, on calcule

$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+x)^2} dt = \frac{1-x+x \ln x}{x(x-1)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x \ln x}{x^3} = \frac{\ln x}{x^2}$.

Puis on utilise l'encadrement $I(x) \leq F(x) \leq I(x) + \frac{1}{x^2}$ et on remarque que $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$

donc $I(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} I(x) + \frac{1}{x^2} \sim \frac{\ln x}{x^2}$, donc $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2}$.