COMPLÉMENTS SUR LES NOMBRES RÉELS

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Donnez l'allure des courbes des fonctions partie entière, $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ (partie fractionnaire de x) et $g : x \mapsto f(x)(1 - f(x))$.

***2)** Soit $f : x \mapsto 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor$. Justifiez que f est 1-périodique. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-4 \leqslant f(x) \leqslant 3$. Donnez l'allure de la courbe de f. En quels points f n'est-elle pas continue ?

***3)** Déterminez la valeur logique (vrai/faux) des propositions suivantes, en justifiant bien sûr.

a) Pour tout $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

b) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

c) Pour tout $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$ ou $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$.

e) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

f) Pour tout $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

****4)**

a) Montrez que pour tout réel x, on a $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

b) Déduisez-en la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{p+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$, où p est un réel fixé.

c) On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$. Déterminez une relation simple entre u_{n+2} et u_n et déterminez une expression de u_n en fonction de n.

****5)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{3k-1}{2} \right\rfloor$.

a) Montrez que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p+2} = u_{2p} + 6p + 3$. Déduisez-en une expression simple de u_{2p} en fonction de p.

b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3}{4}n^2 + \dfrac{1-(-1)^n}{8}$.

****6)** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

***7)** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminez les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor}{n^2}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left\lfloor \sqrt{nx(nx+2)} \right\rfloor}{n}$ (x étant positif)

***8)**

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}b_n$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminez $(2-\sqrt{3})^n$ en fonction de a_n et b_n.

c) En remarquant que $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, montrez que $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$ est un nombre impair.

****9)** On veut montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \sqrt{p} + \sqrt{p+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4p+2} \right\rfloor$.

Soit donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $k = \left\lfloor \sqrt{4p+2} \right\rfloor$.

a) Comparez $\sqrt{p} + \sqrt{p+1}$ et $\sqrt{4p+2}$, déduisez-en que $\left\lfloor \sqrt{p} + \sqrt{p+1} \right\rfloor \leqslant k$.

b) On suppose que l'inégalité précédente est stricte. Montrez alors que $4p^2 + 4p < (k^2 - 2p - 1)^2 \leqslant 4p^2 + 4p + 1$. Déduisez-en la valeur de k^2 en fonction de p, puis que k est pair, enfin concluez.

***10)**

a) Montrez que l'ensemble $\{q^3 \ / \ q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

b) Montrez que l'ensemble $\left\{\dfrac{k}{2^n} \ / \ k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

****11)** Soit x un irrationnel positif et $(p_n), (q_n)$ deux suites d'entiers naturels telles que $\dfrac{p_n}{q_n}$ tende vers x quand n tend vers $+\infty$. Montrez que (p_n) et (q_n) divergent vers $+\infty$.

****12)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

a) Montrez que pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on a $f(nt) = nf(t)$.

b) Déduisez-en que pour tout $(r, t) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, on a $f(rt) = rf(t)$.

c) Montrez qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x$.

d) Et si on remplace l'hypothèse f croissante par f décroissante ?

****13)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez qu'il existe un multiple de 2018 dont l'écriture décimale commence par $\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ ‘1‘}}\ldots$

*****14)** Soit $G = \{a + b\sqrt{2} \ / \ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{2} - 1)^n \in G$.

b) Montrez que G est dense dans $\mathbb{R}$.

*****15)** Montrez que l'ensemble $\{\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

*****16)** (Généralisation de l'exercice précédent) Soit u une suite de réels divergente, strictement croissante et positive telle $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Montrez que l'ensemble $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

****17)** Discutez l'existence ou non de maximum, minimum, borne supérieure ou inférieure des parties suivantes de $\mathbb{R}$, en donnant leurs valeurs en cas d'existence :

a) $A = \left\{\dfrac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

b) $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

c) $A = \left\{\dfrac{1 + (-1)^n}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

d) $A = \left\{\dfrac{1}{m + \frac{1}{n}} \ / \ (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$

e) $A = \left\{\dfrac{1}{m + \frac{1}{n}} \ / \ (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\right\}$

f) $A = \left\{\dfrac{p + q^2}{p^2 + 2q^2 + 2} \ / \ (p, q) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$

g) $A = \left\{\dfrac{1}{|m - n| + \frac{1}{n}} \ / \ (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$

h) $A = \left\{\dfrac{mn}{m^2 + n^2} \ / \ (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$

***18)** Soit u une suite réelle positive. Justifiez que $\ell = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ existe. Existe-t-il une sous-suite de u qui converge vers ℓ ?

****19)** Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

a) Montrez que : $A \subset B \Longrightarrow \sup(A) \leqslant \sup(B)$.

b) On note $A + B$ l'ensemble $\{a + b \ / \ (a, b) \in A \times B\}$. Montrez que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

c) Montrez que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

d) On suppose de plus que A est minorée. On note $D = \{|x - y| \ / \ (x, y) \in A^2\}$. Montrez que D possède une borne inférieure et une borne supérieure et précisez-les en fonction de celles de A.

****20)** Bornes supérieures de fonctions. Le symbole a désigne un réel strictement positif.

a) Montrez que $f_a : x \mapsto \dfrac{x}{1 + ax^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et donnez la valeur de $\sup\limits_{\mathbb{R}} |f_a|$.

b) Même question avec $f_a : x \mapsto \arctan(x + a) - \arctan(a)$.

c) Même question avec $f_a : x \mapsto \arctan((x - a)^2) - \arctan(a^2)$.

d) Même question avec $f_a : x \mapsto \exp(-(x + a)^2) - \exp(-a^2)$.

****21)** Montrez qu'une intersection quelconque d'intervalles est un intervalle.

****22)** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et croissante sur $\mathbb{R}$.

a) Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) = 0\}$. Montrez que A est un intervalle.

b) Soit $B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 1 \leqslant f(x) < 2\}$. Montrez que B est un intervalle.

c) Plus généralement, montrez que si J est un intervalle, alors $I = f^{-1}(J)$ est un intervalle.

*****23)** Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. On souhaite montrer que f admet un point fixe.

On pose $\Omega = \left\{x \in [0,1] \ / \ f(x) \leqslant x\right\}$.

Montrez que $s = \inf \Omega$ existe, puis montrez enfin que s est un point fixe de f.

Ce résultat reste-t-il vrai si on retire l'hypothèse f croissante ? même question en remplaçant $[0,1]$ par $[0,1[$?

*****24)** Soit u une suite de réels positifs telle que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $u_{n+p} \leqslant u_n + u_p$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ et $v_0 = 0$.

a) Justifiez l'existence de $\ell = \inf\{v_n \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

b) Montrez que pour tout $(k,p,r) \in \mathbb{N}^{*2} \times \mathbb{N}$, si $r \in [\![0, p-1]\!]$, alors $\ell \leqslant v_{kp+r} \leqslant v_p + \dfrac{r}{kp+r} v_r$.

c) Montrez que la suite v converge vers ℓ.