Problème 1 - X 1991 - MP 2

Le but principal de ce problème est d'étudier la somme d'une série entière et de la relier à une expression intégrale. La partie I est consacrée à des préliminaires.

Il est admis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

I. Des sommes de Riemann pour une intégrale généralisée.

On considère une fonction φ définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$, continue, réelle, décroissante, strictement positive.

Q 1. On suppose que φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh)$ est convergente pour tout $h>0$.

b) Déterminer la limite de sa somme lorsque h tend vers 0.

Q 2. On suppose seulement que φ est intégrable sur $]0,1]$. On désigne par $E(x)$ la partie entière d'un réel x et on pose :

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1[\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{E(x)} \varphi(k) & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

$$c_k = \int_{k-1}^{k} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(k), \qquad \text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*$$

$$C = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k$$

$$\psi(x) = s(x) - \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + C, \qquad \text{pour tout } x \geq 0$$

a) Démontrer que C existe effectivement.

b) Vérifier que, si $\theta(x) = \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, $|\theta(x)| \leq 1$ pour $x \in]0,+\infty[$. *On pourra distinguer deux cas selon que $x<1$ ou $x \geq 1$.*

II. Série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

On se propose d'étudier la fonction f somme de la série entière :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

On pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, de sorte que l'on a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = A_n - A_{n-1}$, pour $n \geq 2$.

Q 3. Préciser le rayon de convergence de cette série, ainsi que la limite de sa somme lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Q 4. Montrer que, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}$.

On pourra poser $h = -\ln x$ et considérer la fonction $\varphi(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.

Q 5. On définit une fonction s sur $[0,+\infty[$ par :

$$s(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in [0,1[\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{E(y)} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } y \in [1,+\infty[\end{cases}$$

Vérifier que l'on a

$$f(x) = h \int_0^{+\infty} s(y) e^{-hy} \, \mathrm{d}y$$

avec, comme plus haut, $h = -\ln x$.

Q 6.

a) Montrer que $f(x) - \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}$ admet une limite L lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

b) Montrer que $L = (\sqrt{2}+1) f(-1)$.

III. Prolongement analytique de f.

Q 7. Déterminer l'ensemble des valeurs du nombre complexe x pour lesquelles la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{e^{u^2} - x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Sur l'ensemble ainsi mis en évidence, on pose :

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{e^{u^2} - x}.$$

Q 8. Montrer que f et g coïncident sur le disque ouvert $|x| < 1$. *On pourra développer* $\dfrac{1}{1 - xe^{-u^2}}$.

Q 9. Montrer que $g(x) + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln |x|}$ tend vers 0 lorsque x est réel et tend vers $-\infty$.

On pourra poser :

$$x = -e^{t^2}, \ t \geq 0, \quad \varphi_t(u) = \frac{1}{e^{(u^2 - t^2)} + 1},$$

puis minorer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_t(u) \, \mathrm{d}u$ *par* $\displaystyle\int_0^{t-\varepsilon} \varphi_t(u) \, \mathrm{d}u$, *où* ε *est un nombre réel vérifiant* $0 < \varepsilon < t$, *et majorer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_t(u) \, \mathrm{d}u$ *en l'écrivant sous la forme* $\displaystyle\int_0^{t} \varphi_t(u) \, \mathrm{d}u + \int_t^{+\infty} \varphi_t(u) \, \mathrm{d}u$. *Enfin, on montrera que* $\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-t^2}}{2t}$.

IV. Comportement de f sur le cercle-unité.

On suppose maintenant x complexe de module 1, de la forme $x = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$. On pose :

$$\begin{cases} C(\theta) = \mathrm{Re}(f(x)) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{\sqrt{n}} \\ S(\theta) = \mathrm{Im}(f(x)) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

Q 10. Justifier ces définitions.

On pourra introduire les sommes $s_p(\theta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \sin n\theta$ *et* $c_p(\theta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \cos n\theta$

Q 11.

a) Trouver une constante K telle que :

$$\forall n \geq 1, \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \frac{k\pi}{4n} \geq K\sqrt{n}\,.$$

b) La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ converge-t-elle uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$?

Q 12. Démontrer, en utilisant une méthode analogue à celle de la question **Q 8** que $f(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$ pour $\theta \in]0, 2\pi[$. En déduire que

$$C(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} W_\theta(u) \, \mathrm{d}u$$

où on a posé :

$$W_\alpha(u) = \frac{e^{u^2} \cos\theta - 1}{e^{2u^2} - 2e^{u^2}\cos\theta + 1}\,.$$

Q 13. On fixe θ dans $]0, \dfrac{\pi}{2}[$. Déterminer les zéros de W_θ, et de sa derivée, le sens de variations de W_θ, sa valeur en 0 et sa limite lorsque u tend vers $+\infty$. Donner une esquisse de la courbe représentative.

Q 14. Déterminer la limite de $C(\theta)$ lorsque θ tend vers 0 par valeurs positives.

Problème 1

I.

Q 1.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $h > 0$. Par décroissance de φ, pour tout $t \in](n-1)h, nh]$, $\varphi(nh) \leqslant \varphi(t)$, donc par croissance de l'intégrale, $(nh - (n-1)h)\varphi(nh) \leqslant \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (nh - (n-1)h)\varphi((n-1)h)$,

i.e. $h\varphi(nh) \leqslant \displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on additionne de 1 à N : $h\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \varphi(nh) \leqslant \int_0^{Nh} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ (car φ est positive et intégrable sur $]0, +\infty[$).

La suite des sommes partielles de la série à termes **positifs** $\sum h\varphi(nh)$ est donc majorée, donc cette série converge.

b) L'inégalité précédente donne par passage à la limite quand $N \to +\infty$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Mais on a aussi une autre inégalité :

pour tout $n \geqslant 2$ et $t \in [(n-1)h, nh]$, $\varphi(t) \leqslant \varphi((n-1)h)$ donc $\displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h\varphi((n-1)h)$, donc en additionnant : $\displaystyle\int_h^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh)$.

Donc on a l'encadrement : $\displaystyle\int_h^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\lim_{h\to 0} \int_h^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ puisque φ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc par encadrement

$$\lim_{h\to 0} h\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(nh) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Q 2.

a) Par décroissance de φ sur $]0, +\infty[$, pour tout $k \geqslant 2$, $\varphi(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \varphi \leqslant \varphi(k-1)$, donc $0 \leqslant c_k \leqslant \varphi(k-1) - \varphi(k)$.

Comme φ est décroissante et positive, elle a une limite finie $\ell \geqslant 0$ en $+\infty$ (th. de la limite monotone). Donc la suite $(\varphi(k))_{k\geqslant 1}$ a une limite réelle, donc sa série différence associée $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \varphi(k-1) - \varphi(k)$ est convergente.

Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum c_k$ converge. De plus, on a alors $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} c_k \leqslant \varphi(1) - \ell$,

donc $0 \leqslant c_1 \leqslant C \leqslant c_1 + \varphi(1) - \ell = \displaystyle\int_0^1 \varphi - \ell$.

Dans toute la suite, on pose $C' = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} c_k = C - c_1$, de sorte que $0 \leqslant C' \leqslant \varphi(1) - \ell$.

b) On commence par le cas $x < 1$:

$\psi(x) = -\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + C = -\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(1) + C' = \int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(1) + C'$

or par décroissance de φ, on a $(1-x)\varphi(1) \leqslant \displaystyle\int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (1-x)\varphi(x)$, de plus $C' \geqslant 0$ et $\ell \geqslant 0$,

donc $\psi(x) \leqslant \displaystyle\int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \ell \leqslant \int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (1-x)\varphi(x) \leqslant \varphi(x)$

et $-\varphi(x) \leqslant -\varphi(1) \leqslant -x\varphi(1) \leqslant (1-x)\varphi(1) - \varphi(1) + C' \leqslant \psi(x)$,

donc finalement, $-\varphi(x) \leqslant \psi(x) \leqslant \varphi(x)$, ce qui revient à $|\theta(x)| \leqslant 1$.

Puis dans le cas $x \geqslant 1$: on pose $n = E(x)$ de sorte que $n \leqslant x \leqslant n+1$,

donc $\displaystyle \psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) - \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + C = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) - \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=n+2}^{+\infty} c_k + \sum_{k=1}^{n+1}\left(\int_{k-1}^{k} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(k)\right)$

donc $\displaystyle \psi(x) = -\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=n+2}^{+\infty} c_k + \int_0^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(n+1) = \int_x^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(n+1) + \sum_{k=n+2}^{+\infty} c_k$

or $\displaystyle \sum_{k=n+2}^{+\infty} c_k \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi(k-1) - \varphi(k) = \varphi(n+1) - \ell$

donc $\displaystyle \psi(x) \leqslant \int_x^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \ell \leqslant \int_x^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (n+1-x)\varphi(x) \leqslant \varphi(x)$

et $\displaystyle -\varphi(x) \leqslant -\varphi(n+1) \leqslant (n-x)\varphi(n+1) = (n+1-x)\varphi(n+1) - \varphi(n+1) \leqslant \int_x^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(n+1) \leqslant \psi(x)$

donc finalement, $-\varphi(x) \leqslant \psi(x) \leqslant \varphi(x)$, ce qui revient à $|\theta(x)| \leqslant 1$.

II.

Q 3. D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est 1.

Pour $x \in [0,1[$, $f(x)$ est la somme d'une série à termes positifs, donc pour tout $N \geqslant 1$, $\displaystyle f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

De plus, comme toutes les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ sont croissantes sur $[0,1[$, f l'est aussi donc elle a une limite $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 1 par valeurs inférieures.

Donc par passage à la limite quand $x \to 1$, on obtient : pour tout $N \geqslant 1$, $\displaystyle L \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Mais comme la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est à termes positifs et diverge, ses sommes partielles ont pour limite $+\infty$ quand $N \to +\infty$. Donc il vient $L \geqslant +\infty$, *i.e.* $L = +\infty$.

Q 4. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ vérifie les conditions de la question **Q 1** donc $\displaystyle \lim_{h\to 0} h \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(nh) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Par changement de variable $t = u^2$ (bijectif de $]0,+\infty[$ dans lui-même et C^1), $\displaystyle \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Donc $\displaystyle \lim_{h\to 0} h \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{nh}} = \lim_{h\to 0} \sqrt{h} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$, *i.e.* $\displaystyle \lim_{x\to 1_-} \sqrt{-\ln x}\, f(x) = \sqrt{\pi}$. Or $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$, donc il vient $\sqrt{1-x}\, f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{\pi}$.

Q 5. D'abord, on note que pour tout $y > 0$, $0 \leqslant s(y) \leqslant E(y)$ (somme de termes tous plus petits que 1) donc $0 \leqslant s(y)e^{-hy} \leqslant ye^{-hy}$, donc $y \mapsto s(y)e^{-hy}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Ensuite, $\displaystyle h\int_0^{+\infty} s(y)e^{-hy}\,\mathrm{d}y = h\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} s(y)e^{-hy}\,\mathrm{d}y = h\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} s(n)e^{-hy}\,\mathrm{d}y = h\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \int_n^{n+1} e^{-hy}\,\mathrm{d}y$

$\displaystyle = h\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left[\frac{e^{-hy}}{-h}\right]_{y=n}^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n e^{-ny}(1-e^{-y}) = (1-e^{-y})\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-ny} = (1-e^{-y})\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-ny}$ (par th. de Fubini sur une famille de réels positifs)

$\displaystyle = (1-e^{-y})\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{n=k}^{+\infty} e^{-ny}\right) = (1-e^{-y})\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{e^{-ky}}{1-e^{-y}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-ky}\right) = f(x)$.

Q 6.

a) Cette fois-ci, on prend $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ qui vérifie les conditions de la question **Q 2**. Avec les mêmes notations, on a montré que pour tout $x > 0$, $|\psi(x)| \leqslant \varphi(x)$.

Donc $\left|h\int_0^{+\infty}(s(y)+C-2\sqrt{y})e^{-hy}\right| \leqslant h\int_0^{+\infty}|s(y)+C-2\sqrt{y}|\,e^{-hy} \leqslant h\int_0^{+\infty}\varphi(y)e^{-hy} = \sqrt{\pi h}$ (par changement de variable $hy = u^2$)

autrement dit $\left|f(x)+C-2h\int_0^{+\infty}\sqrt{y}e^{-hy}\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \sqrt{\pi}\sqrt{-\ln x}$.

Par intégration par parties (licite, je ne détaille pas), $2h\int_0^{+\infty}\sqrt{y}e^{-hy}\,\mathrm{d}y = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\ln x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to 1_-}\sqrt{-\ln x} = 0$ donc par th. d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) - \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\ln x}} = -C$.

Il reste à étudier $\Delta(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\ln x}} - \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{\pi}\dfrac{1-x+\ln x}{\sqrt{1-x}\sqrt{-\ln x}(\sqrt{1-x}+\sqrt{-\ln x})}$.

Le dénominateur est équivalent à $2(1-x)^{3/2}$ et le numérateur à $\dfrac{-1}{2}(1-x)^2$ (d.l. de $\ln(1+t)$ en 0 à l'ordre 2). Donc $\Delta(x) \xrightarrow[x\to 1_-]{} 0$, d'où $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) - \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}} = -C$.

b) $L = -C = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})\right) = \lim_{n\to+\infty} A_n - 2\sqrt{n}$. On pose $B_n = A_n - 2\sqrt{n}$.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

$S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}}$ en séparant les termes d'indices pair et impairs.

$S_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - \left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$

donc $S_{2n} = \sqrt{2}A_n - A_{2n} = \sqrt{2}B_n - B_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}L - L = (\sqrt{2}-1)L$, donc $f(-1) = (\sqrt{2}-1)L$, *i.e.* $L = (\sqrt{2}+1)L$.

III.

Q 7. On ne sait intégrer que des fonctions continues par morceaux ! Donc pour que $u\mapsto\dfrac{1}{e^{u^2}-x}$ soit intégrable sur $]0,+\infty[$, il faut déjà qu'elle soit continue par morceaux, donc définie sur $]0,+\infty[$.

Or quand u décrit $]0,+\infty[$, e^{u^2} décrit $]1,+\infty[$, donc pour que $u\mapsto\dfrac{1}{e^{u^2}-x}$ soit définie sur $]0,+\infty[$, il faut que $x\notin\,]1,+\infty[$.

Ensuite, si $x=1$, $u\mapsto\dfrac{1}{e^{u^2}-x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $\dfrac{1}{e^{u^2}-1}\underset{u\to 0}{\sim}\dfrac{1}{u^2}$, donc $u\mapsto\dfrac{1}{e^{u^2}-x}$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$.

Enfin, si $x\notin[1,+\infty[$, la fonction $u\mapsto\dfrac{1}{e^{u^2}-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{1}{e^{u^2}-x}\underset{u\to+\infty}{\sim}e^{-u^2}$, donc $u\mapsto\dfrac{1}{e^{u^2}-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Conclusion : l'ensemble recherché est $\mathbb{C}-[1,+\infty[$.

Q 8. Pour $|x|<1$ et $u\geqslant 0$, $|xe^{-u^2}|\leqslant|x|<1$ donc la série géométrique $\sum(xe^{-u^2})^n$ converge absolument :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(xe^{-u^2})^n = \frac{1}{1-xe^{-u^2}}$. Donc $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{1-xe^{-u^2}}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(n+1)u^2}x^{n+1}\,\mathrm{d}u$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}|e^{-(n+1)u^2}x^{n+1}|\,\mathrm{d}u = |x|^{n+1}\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)u^2}\,\mathrm{d}u = |x[^{n+1}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{n+1}}$ par changement de variable $t=\sqrt{n+1}u$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}|e^{-(n+1)u^2}x^{n+1}|\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

Comme $|x|<1$, la série $\displaystyle\sum\int_0^{+\infty}|e^{-(n+1)u^2}x^{n+1}|\,\mathrm{d}u$ converge, donc d'après le th. d'intégration terme à terme,

$g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)u^2}x^{n+1}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = f(x)$.

Q 9. $g(x) = \dfrac{-2e^{t^2}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{e^{t^2}(e^{u^2-t^2}+1)}\,\mathrm{d}u = \dfrac{-2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_t(u)\,\mathrm{d}u$ donc $g(x) + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\ln|x|} = \dfrac{2}{\pi}\left(t - \displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_t(u)\,\mathrm{d}u\right)$.

D'abord,

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_t(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t \varphi_t(u)\,\mathrm{d}u + \int_t^{+\infty}\varphi_t(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^t 1\,\mathrm{d}u + \int_t^{+\infty} e^{t^2-u^2}\,\mathrm{d}u$ car $\varphi_t(u) \leqslant 1$ et $\varphi_t(u) \leqslant e^{t^2-u^2}$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_t(u)\,\mathrm{d}u \leqslant t + e^{t^2}\int_t^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$. On pose $\alpha(t) = e^{t^2}\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Or $\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_t^{+\infty}\frac{1}{u}\times ue^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-1}{2u}e^{-u^2}\right]_{u=t}^{+\infty} - \int_t^{+\infty}\frac{1}{2u^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ (int. par partie licite sans difficulté),

donc $\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{e^{-t^2}}{2t} - \int_t^{+\infty}\frac{1}{2u^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

De plus, $\dfrac{1}{2u^2}e^{-u^2} \underset{u\to+\infty}{=} o(e^{-u^2})$ donc par intégration des relations de comparaison (cas convergent),

$\displaystyle\int_t^{+\infty}\frac{1}{2u^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \underset{u\to+\infty}{=} \int_t^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$, donc finalement $\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t^2}}{2t}$, donc $\alpha(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Ensuite,

si $0 < \varepsilon < t$, alors $\displaystyle\int_0^{t-\varepsilon}\varphi_t(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{+\infty}\varphi_t(u)\,\mathrm{d}u$, donc $\displaystyle\int_0^{t-\varepsilon}(\varphi_t(u)-1)\,\mathrm{d}u - \varepsilon \leqslant \int_0^{+\infty}\varphi_t(u)\,\mathrm{d}u - t$. On pose $\beta(t) = \displaystyle\int_0^{t-\varepsilon}(\varphi_t(u)-1)\,\mathrm{d}u$.

Or $|\beta(t)| \leqslant \displaystyle\int_0^{t-\varepsilon}|\varphi_t(u)-1|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{t-\varepsilon} e^{u^2-t^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{t-\varepsilon} e^{\varepsilon^2-2t\varepsilon}\,\mathrm{d}u = (t-\varepsilon)e^{\varepsilon^2-2t\varepsilon}$, donc par encadrement, $\beta(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

On a donc l'encadrement : pour tout $t > \varepsilon > 0$

$$\beta(t) - \varepsilon \leqslant \int_0^{+\infty}\varphi_t(u)\,\mathrm{d}u - t \leqslant \alpha(t)$$

où $\alpha(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $\beta(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Maintenant, on conclut : soit $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $0 \leqslant \alpha(t) \leqslant 2\varepsilon$ et il existe$B > 0$ tel que pour tout $t \geqslant B$, $-\varepsilon \leqslant \beta(t) \leqslant 0$,

donc pour $t \geqslant \max(\varepsilon, A, B)$, on a $-2\varepsilon \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_t(u)\,\mathrm{d}u - t \leqslant 2\varepsilon$, ce qui signifie que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}\varphi_t(u)\,\mathrm{d}u - t = 0$,

ce qui revient à dire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) - \frac{2\sqrt{\ln|x|}}{\sqrt{\pi}} = 0$.

IV.

Q 10. $s_p(\theta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{p}\sin n\theta = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{p} e^{in\theta}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \sin\tfrac{(n+1)\theta}{2}\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ donc $|s_p| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$: la suite $(s_p(\theta)$ est bornée et de même pour la suite $(c_p(\theta))$.

$S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p}\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{p}(s_n(\theta)-s_{n-1}(\theta))\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{p} s_n(\theta)\frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{p} s_{n-1}(\theta)\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{p} s_n(\theta)\frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=0}^{p-1} s_n(\theta)\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{p} s_n(\theta)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - s_{p-1}(\theta)\frac{1}{\sqrt{p}}$.

Comme la suite $(s_p(\theta)$ est bornée, le terme $s_{p-1}(\theta)\dfrac{1}{\sqrt{p}}$ a pour limite 0 quand $p \to +\infty$.

Et pour tout $n \geqslant 1$, $\left|s_n(\theta)\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right| \leqslant K\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$: le majorant à droite est le terme général d'une série télescopique convergente, donc la série $\sum s_n(\theta)\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ converge absolument, donc au total S_p a une limite finie quand p tend vers $+\infty$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ converge et de même pour la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n\theta}{\sqrt{n}}$.

Q 11.

a) Pour $n+1 \leq k \leq 2n$ on a $\frac{\pi}{4} \leq \frac{k\pi}{4n} \leq \frac{\pi}{2}$ donc en minorant le sinus par sa plus petite valeur et la somme par le nombre de termes fois la plus petite il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \frac{k\pi}{4n} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \geqslant n \times \frac{1}{\sqrt{2.2n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

b) Si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, alors la suite de fonctions (S_p) où $S_p : \theta \mapsto \sum_{n=1}^{p} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, donc la suite $(S_{2p} - S_p)$ converge uniformément vers 0.

Or d'après ce qui précède, $\left|S_{2n}(\frac{\pi}{4n}) - S_n(\frac{\pi}{4n})\right|$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$, donc $\|S_{2n} - S_n\|_\infty$ ne converge pas vers 0, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Q 12. On veut intervertir encore une fois un symbole intégrale et un sybole somme :

$$\begin{aligned} g(e^{i\theta}) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{e^{u^2} - e^{i\theta}} = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} e^{ik\theta - (k+1)u^2} \,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{ik\theta} \int_0^\infty e^{-(k+1)u^2} \,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ik\theta} \int_0^\infty e^{-(k+1)u^2} \,du \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{k+1}} = f(e^{i\theta}) \end{aligned}$$

On considère la suite des sommes partielles :

$$\begin{aligned} T_N(u) &= \sum_{k=0}^{N} e^{ik\theta - (k+1)u^2} = e^{-u^2} \frac{1 - e^{i(N+1)(\theta - u^2)}}{1 - e^{i(\theta - u^2)}} \\ \Rightarrow |T_N(u)| &\leq \frac{2}{|e^{u^2} - e^{i\theta}|} = \varphi(u) \end{aligned}$$

fonction majorante qui est continue sur $\mathbb{R}$ parce que $x = e^{i\theta}$ n'est pas égal à 1 (question 10°), et intégrable puisqu'équivalente à l'infini à e^{-u^2}. Le théorème de convergence dominée est ainsi applicable à la suite (T_N) et amène le résultat espéré :

pour tout nombre complexe x tel que $f(x)$ existe on a $f(x) = g(x)$.

En particulier, si on prend les parties réelles il vient

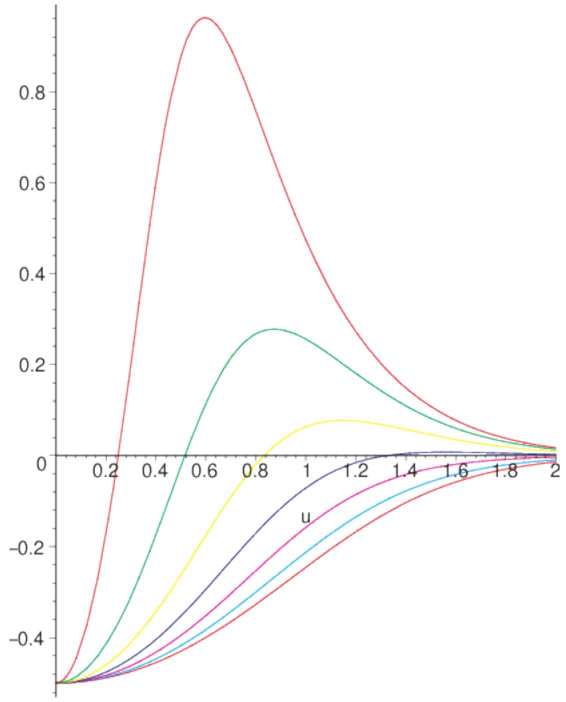
$$\begin{aligned} C(\theta) = \mathrm{Re}(f(e^{i\theta})) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{u^2} - e^{i\theta}}\right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta} e^{u^2} - 1}{e^{2u^2} - 2\cos\theta e^{u^2} + 1}\right) \mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty W_\theta(u) \,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

avec $W_\theta(u) = \frac{e^{u^2}\cos\theta - 1}{e^{2u^2} - 2\cos\theta e^{u^2} + 1}$.

Q 13. W_θ s'annule pour $e^{u^2} = \frac{1}{\cos\theta}$ soit $\theta = \pm\sqrt{-\ln\cos\theta}$; elle est aussi paire et vérifie $W(0) = -\frac{1}{2}$; elle tend vers 0 à l'infini. Concernant W', il est commode de poser $X = e^{u^2} \geq 1$ ce qui conduit à étudier la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X\cos\theta - 1}{X^2 - 2X\cos\theta + 1}$; on a $F'(X) = \frac{-X^2\cos\theta + 2X - \cos\theta}{D^2}$ qui chaneg de signe pour $X = \frac{1 \pm \sin\theta}{\cos\theta}$. Ici on a

$$\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 1 > \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

de sorte que, par composition, W' ne s'annule qu'en $\pm\sqrt{\ln\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$ ainsi qu'en 0 évidemment.



Q 14. On pose $v = u^2$. Il vient, tenant compte du fait que pour θ assez petit $e^v \cos\theta \geq 1$ pour tout $v \geq 0$:

$$\begin{aligned} C(\theta) &\geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{e^v \cos\theta - 1}{e^{2v} - 2e^v \cos\theta + 1} \, \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\ln(1 - 2e^{-v} \cos\theta + e^{-2v})\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \ln \frac{1 - 2e^{-1} \cos\theta + e^{-2}}{2(1 - \cos\theta)} \end{aligned}$$

Quand θ tend vers zéro, le numérateur tend vers une limite non nulle et le dénominateur tend vers 0. On trouve ainsi que $\lim\limits_{\theta \to 0^+} C(\theta) = +\infty$.