Problème 1 - D'après E3A MP - 2013

Ce problème a été librement inspiré par le sujet E3A de 2013 en MP.

Les deux parties ne sont pas indépendantes : les résultats des calculs de la partie 1 sont utilisés dans la partie 2.

On rappelle que la fonction sinus hyperbolique est la fonction sh : $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$.

I. Calculs d'intégrales

Q 1. Soit $a > 0$. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et montrer qu'elle vaut $\dfrac{\arctan a}{a}$. *Indication : on pourra calculer la dérivée de* $t \mapsto \arctan\left(\dfrac{t}{a}\right)$.

Q 2. Soit a, b deux réels tels que $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On pose $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^a \mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que $I(a,b)$ est une intégrale convergente.
b) Donner une relation simple entre $I(a+1,b)$ et $I(a,b)$.
c) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $I(n,b)$ en fonction de n et b.

Q 3. Soit a, b deux réels strictement positifs.

a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(at)\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t$ converge.
b) Montrer qu'elle vaut $\dfrac{a}{a^2+b^2}$. *Indication : on pourra faire intervenir une exponentielle complexe.*

Q 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que S_n est une intégrale convergente.
b) Montrer que pour $t > 0$, $\dfrac{1}{\operatorname{sh} t} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)t}\,\mathrm{d}t$. Cette égalité est appelée **E**.
c) Montrer que $S_n = 2\,(n!)\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}$.

Q 5. Soit α un réel.

a) À quelle condition sur α la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge-t-elle ? Dans ce cas, on note $Z(\alpha)$ sa somme.
b) Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha}$ à l'aide de $Z(\alpha)$. *Indication : on pourra séparer les termes d'indices pairs et impairs dans la somme $Z(\alpha)$ en justifiant.*
c) Donner une expression de S_n à l'aide de $Z(n+1)$. En admettant que $Z(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, donner la valeur de S_1.

Q 6.

a) En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que pour tout $\alpha > 1$, $Z(\alpha) \leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$.
b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $2\,(n!) \leqslant S_n \leqslant 4\,(n!)$.

II. Étude d'une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$.

Q 7. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire.

Dans toute la suite, on étudie la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ seulement.

Q 8.

a) Justifier que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin u| \leqslant |u|$.
b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x)| \leqslant x S_1$.

Q 9. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. *Indication : on pourra commencer par montrer la continuité sur tout segment* $[0, A]$ *où* $A > 0$.

Q 10. En réutilisant l'égalité **E**, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2 + (2n+1)^2}$.

Q 11. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est-elle normalement convergente sur $[0, +\infty[$?

Q 12. On pose $v_n = n u_n$.

a) Étudiez la nature de la convergence de la suite de fonctions (u_n) : converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$? uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

b) Même question avec la suite (v_n).

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) \geqslant \frac{1}{2} v_{2n}(x)$.

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est-elle uniformément convergente sur $[0, +\infty[$?

Q 13.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{2}{x^2 + (2n+1)^2}$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

c) Donner la valeur de $f'(0)$ en utilisant la partie 1.

Q 14. Soit $x > 0$, fixé.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{x^2 + (2n+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_{2n-1}^{2n+1} \frac{1}{x^2 + u^2} \, \mathrm{d}u$.

b) En déduire que $f(x) \leqslant x \left(\dfrac{2}{1 + x^2} + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + u^2} \, \mathrm{d}u \right)$, puis que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{\pi}{2}$.

Q 15.

a) Rappeler le développement en série entière de la fonction sin.

b) Montrer que f est développable en série entière sur $]-1, +1[$, puis que le rayon de convergence de cette série entière est exactement égal à 1.

Q 16. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ converge. *On pourra intégrer par parties.*

On admet que $I = \dfrac{\pi}{2}$.

On pose $g : t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh} t} - \dfrac{1}{t}$.

Q 17. Quelles sont les limites de g en 0 et $+\infty$? Montrer que g' est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q 18.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t) \sin(xt) \, \mathrm{d}t$.

b) Montrer que f a pour limite $\dfrac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

Fin du problème.

L'étude de la fonction f se termine ici. Avec plus de travail, on peut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \operatorname{th}\left(\dfrac{\pi}{2} x\right)$ où $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$ est la fonction tangente hyperbolique.

Problème 1

I.

Q 1. La dérivée de $t \mapsto \arctan\left(\frac{t}{a}\right)$ est la fonction $t \mapsto \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}$, c'est-à-dire $t \mapsto \frac{a}{a^2+t^2}$.

Donc $\int_1^X \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right)\right]_{t=1}^X = \frac{1}{a}\left(\arctan\frac{X}{a} - \arctan\frac{1}{a}\right)$.

Or $\lim\limits_{X\to+\infty} \arctan\frac{X}{a} = \frac{\pi}{2}$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{a}\right)$.

Or une célèbre formule de trigonométrie affirme que pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, donc puisque $a > 0$, il vient $\int_1^{+\infty} \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\arctan a}{a}$.

Q 2.

a) La fonction $\varphi : t \mapsto t^a\mathrm{e}^{-bt}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $t^a\mathrm{e}^{-bt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to +\infty$, donc comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, φ l'est aussi, donc $I(a,b) = \int_0^1 \varphi + \int_1^{+\infty} \varphi$ est une intégrale convergente.

b) On effectue une intégration par parties : comme les deux quantités $\left[t^{a+1} \times \frac{-\mathrm{e}^{-bt}}{b}\right]_0^{+\infty}$ et $\int_0^{+\infty} (a+1)t^a \times \frac{-\mathrm{e}^{-bt}}{b}\,\mathrm{d}t$ sont bien définies, alors

$$I(a+1,b) = \left[t^{a+1} \times \frac{-\mathrm{e}^{-bt}}{b}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (a+1)t^a \times \frac{-\mathrm{e}^{-bt}}{b}\,\mathrm{d}t = \frac{a+1}{b}I(a,b).$$

c) La relation précédente donne une relation de récurrence : $I(n+1,b) = \frac{n+1}{b}I(n,b)$, puis une preuve par récurrence montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I(n,b) = \frac{n!}{b^{n+1}}$.

On pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat « $I(n,b) = \frac{n!}{b^{n+1}}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie, car il est bien connu que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b}$.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $I(n+1,b) = \frac{n+1}{b}I(n,b) = \frac{n+1}{b} \times \frac{n!}{b^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{b^{n+2}}$ donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Q 3.

a) Pour tout $t \in [0,+\infty[$, $|\sin(at)\mathrm{e}^{-bt}| \leqslant \mathrm{e}^{-bt}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-bt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(at)\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

b) $\sin(at)\mathrm{e}^{-bt} = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{iat}\mathrm{e}^{-bt}) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{(-b+ia)t})$ donc $\int_0^{+\infty} \sin(at)\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-b+ia)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(-b+ia)t}}{-b+ia}\right]_{t=0}^{+\infty}\right)$

or $|\mathrm{e}^{(-b+ia)t}| = \mathrm{e}^{-bt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\int_0^{+\infty} \sin(at)\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(0 - \frac{1}{-b+ia}\right) = \mathrm{Im}\,\frac{1}{b-ia} = \mathrm{Im}\,\frac{b+ia}{b^2+a^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$.

Q 4.

a) La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{t^n}{\operatorname{sh} t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Si $n = 1$, elle a pour limite 1 en 0 et si $n \geqslant 2$, elle a pour limite 0 en 0, car $\operatorname{sh} t \underset{t\to 0}{\sim} t$. L'intégrale $\int_0^1 \varphi$ converge par conséquent (fausse singularité en 0).

Quand $t \to +\infty$, $\varphi(t) \sim \frac{2t^n}{\mathrm{e}^t} = 2t^n\mathrm{e}^{-t}$, donc d'après la question **2.a.**, φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc au total, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc S_n est une intégrale convergente.

b) Pour $t>0$, $\dfrac{1}{\operatorname{sh} t} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} = 2\mathrm{e}^{-t} \times \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-2t}}$, or $0 \leqslant \mathrm{e}^{-2t} < 1$, donc $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-2t}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-2t})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2kt}$ (série géométrique), donc $\dfrac{1}{\operatorname{sh} t} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)t}$.

c) D'après la question précédente, pour tout $t>0$, $\dfrac{t^n}{\operatorname{sh} t} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-(2k+1)t}$.

— Or les fonctions $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-(2k+1)t}$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$;

— et la série des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} |t^n \mathrm{e}^{-(2k+1)t}| \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-(2k+1)t} \,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{n!}{(2k+1)^{n+1}}$ (d'après la question **2.c.**), est une série convergente.

Donc d'après le th. d'intégration terme à terme, on peut intervertir $\sum$ et $\int$:

$$S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\operatorname{sh} t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(2\sum_{k=0}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-(2k+1)t}\right) \mathrm{d}t = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-(2k+1)t} \,\mathrm{d}t = 2\,(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}.$$

Q 5.

a) C'est du cours : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

b) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est à termes positifs, donc quand $\alpha>1$, elle est absolument convergente, donc d'après le cours sur les familles sommables, on peut sommer par paquets, ici les termes d'indices pairs et les autres d'indices impairs.

$$Z(\alpha) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^\alpha} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha}.$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{Z(\alpha)}{2^\alpha}$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) Z(\alpha)$.

c) $S_n = 2(n!) \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}} = 2(n!) \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) Z(n+1)$ d'après les questions précédentes.

En particulier, $S_1 = 2 \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^2}{4}$.

Q 6.

a) Soit $\alpha>1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t$.

On additionne ces inégalités : pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{t=1}^{n} = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.

Donc pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$. Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$, donc $Z(\alpha) = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

b) D'après la question précédente, $S_n \leqslant 2(n!) \left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) \times \dfrac{n+1}{n} \leqslant 2(n!) \times \dfrac{n+1}{n}$, or dès que $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{n+1}{n} \leqslant 2$ donc $S_n \leqslant 4(n!)$.

L'autre inégalité est évidente, car le premier terme dans la somme S_n est 1 et les autres sont positifs, donc $2(n!) \leqslant S_n$.

II.

Q 7. Si $x=0$, il est évident que $f(x)$ existe et vaut 0.

Si $x \neq 0$, alors

— la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}$ est continue sur $]0,+\infty[$;

— elle est prolongeable par continuité en 0 car $\dfrac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{xt}{t} = x$ donc elle est intégrable sur $]0,1]$;

— enfin, pour $t \geqslant 1$, $\left|\dfrac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\right| \leqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}$,

or on a aussi $\dfrac{2}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$,

donc $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}$ l'est aussi.

Au total, $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

L'imparité est évidente, car sin est elle-même une fonction impaire.

Q 8.

a) Il s'agit de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction sin entre 0 et u, car $|\sin'| = |\cos| \leqslant 1$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(xt)|}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|xt|}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = xS_1$.

Q 9. Soit $A > 0$.

— Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}$ est continue sur $[0, A]$.

— Pour tout $x \in [0, A]$, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\sin(xt)}{\operatorname{sh} t}\right| \leqslant \dfrac{xt}{\operatorname{sh} t} \leqslant A\dfrac{t}{\operatorname{sh} t}$ (hypothèse de domination) et $t \mapsto \dfrac{t}{\operatorname{sh} t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (partie 1, question **4.**).

Donc d'après le th. de continuité sous le signe intégrale, f est continue sur $[0, A]$.

Comme ceci est vrai pour tout $A > 0$, par réunion d'intervalles, f est continue sur $\displaystyle\bigcup_{A>0} [0, A] = [0, +\infty[$.

Q 10. D'après l'inégalité **E**, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-(2k+1)t}\right) \mathrm{d}t$.

— Or pour tout $k \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \sin(xt)\mathrm{e}^{-(2k+1)t}$ est intégrable d'après **I.3.a.**

— Et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(xt)\mathrm{e}^{-(2k+1)t}|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} xt\mathrm{e}^{-(2k+1)t}\,\mathrm{d}t = x\frac{1}{(2k+1)^2}$ d'après les questions **8.a.** et **I.2.c.**

Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |\sin(xt)\mathrm{e}^{-(2k+1)t}|\,\mathrm{d}t$ converge.

D'après le th. d'intégration terme à terme, on peut alors intervertir $\sum$ et $\int$:

$f(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-(2k+1)t}\right) \mathrm{d}t = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-(2k+1)t}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + (2k+1)^2}$ d'après la question **I.3.b.**

Q 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, $u_n'(x) = 2\dfrac{(2n+1)^2 - x^2}{(x^2 + (2n+1)^2)^2}$ d'où on en déduit les variations de $|u_n| = u_n$ sur $[0, +\infty[$ et en particulier sa valeur maximale, atteinte en $2n + 1$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = u_n(2n+1) = \dfrac{1}{2n+1}$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \|u_n\|_\infty^{[0,+\infty[}$ diverge, donc la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Q 12.

a) D'après la question **II 10**, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, donc la suite (u_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $\|u_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = u_n(2n+1) = \dfrac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la suite (u_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

b) Pour tout $x \geqslant 0$, $v_n(x) = \dfrac{2nx}{x^2 + (2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2nx}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la suite de focntions (v_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $\|v_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = n\|u_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = \dfrac{n}{2n+1}$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$, donc la suite (v_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)$ car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k(x) \geqslant 0$.

Et pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $u_k(x) \geqslant u_{2n}(x)$ donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) \geqslant n \times u_{2n}(x) = \frac{1}{2} v_{2n}(x) \geqslant 0$.

Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, alors la suite des restes partiels $\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right)$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, or par l'encadrement précédent, on a $\left\|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}\|v_{2n}\|_\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|v_{2n}\|_\infty = 0$, ce qui signifie que la suite (v_{2n}) converge uniformément vers 0, ce qui est faux d'après l'étude précédente.

Donc la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Q 13.

a) Simple calcul : $u_n'(x) = 2\dfrac{(2n+1)^2 - x^2}{(x^2+(2n+1)^2)^2}$ donc $|u_n'(x)| = 2\dfrac{|(2n+1)^2 - x^2|}{(x^2+(2n+1)^2)^2} \leqslant 2\dfrac{(2n+1)^2 + x^2}{(x^2+(2n+1)^2)^2} = \dfrac{2}{x^2+(2n+1)^2}$ par inégalité triangulaire.

b) Alors on en déduit : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{2}{(2n+1)^2}$.

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{(2n+1)^2}$ est convergente. Donc la série $\sum u_n'$ est normalement convergente sur $[0, +\infty[$.

Comme les fonctions u_n sont toutes de classe C^1 et que f est la somme de la série $\sum u_n$ (convergence simple), alors d'après le th. de dérivation sous le signe $\sum$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2 - x^2}{(x^2+(2n+1)^2)^2}$.

c) En particulier, $f'(0) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = S_1 = \frac{\pi^2}{4}$ d'après **I.5.c.**

Q 14.

a) La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{x^2+u^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, or pour tout $n \geqslant 1$, $[2n-1, 2n+1] \subset \mathbb{R}_+$,

donc $\displaystyle\int_{2n-1}^{2n+1} \frac{1}{x^2+(2n+1)^2}\,du \leqslant \int_{2n-1}^{2n+1} \frac{1}{x^2+u^2}\,du$, c'est-à-dire $\displaystyle\frac{2}{x^2+(2n+1)^2} \leqslant \int_{2n-1}^{2n+1} \frac{1}{x^2+u^2}\,du$.

b) On additionne les inégalités précédentes :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{x^2+(2n+1)^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{2n-1}^{2n+1} \frac{1}{x^2+u^2}\,du = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+u^2}\,du$, donc en ajoutant le premier terme de la somme (pour $n=0$), qui vaut $\dfrac{2}{x^2+1}$, on obtient $f(x) \leqslant x\left(\dfrac{2}{1+x^2} + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+u^2}\,du\right)$.

D'après la question **I.1.** on a alors $f(x) \leqslant x\left(\dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{\arctan x}{x}\right) = \dfrac{2x}{x^2+1} + \arctan x$.

Or $\dfrac{2x}{x^2+1} \leqslant 1$ et $\arctan x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, donc il vient $f(x) \leqslant 1 + \dfrac{\pi}{2}$.

Le signe de $f(x)$ est évident d'après son écriture sous forme de série (question **10.**).

Q 15.

a) Cours : $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

b) Soit $x \in [0, 1[$. Alors $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(xt)^{2n+1}}{\operatorname{sh} t}\right) dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{t^{2n+1}}{\operatorname{sh} t} x^{2n+1}\right) dt$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \dfrac{t^{2n+1}}{\operatorname{sh} t} x^{2n+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question **I.4.a.**

— Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{t^{2n+1}}{\operatorname{sh} t} x^{2n+1}\right| dt = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{\operatorname{sh} t}\,dt = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} S_{2n+1}$,

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{t^{2n+1}}{\operatorname{sh} t} x^{2n+1}\right| dt \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \times 4(2n+1)! = 4x^{2n+1}$ d'après **I.6.b.**

Comme $0 \leqslant x < 1$, la série $\sum 4x^{2n+1}$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{t^{2n+1}}{\operatorname{sh} t} x^{2n+1}\right| dt$ converge.

D'après le th. d'intégration terme à terme, on a donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} S_{2n+1} \right) x^{2n+1}$.

La fonction f est donc développable en série entière sur $[0, +1[$, et donc sur $]-1, +1[$, car l'ouvert de convergence d'une série entière est toujours symétrique par rapport à 0.

De plus, comme $2(2n+1)! \leqslant S_{2n+1}$, alors pour $x > 1$, $\left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} S_{2n+1} \right| x^{2n+1} \geqslant 2$, donc la série entière précédente diverge grossièrement quand $x > 1$.

Le rayon de convergence est donc exactement égal à 1.

Q 16. Exercice fait en cours (voir chapitre Intégrales généralisées).

Q 17. En $+\infty$, il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim_{+\infty} g = 0$.

$g(t) = \frac{t - \operatorname{sh} t}{t \operatorname{sh} t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{-\frac{t^3}{6}}{t^2} = \frac{-t}{6} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, car le d.l. de sh en 0 à l'ordre 3 est $\operatorname{sh} t = t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$.

On signale d'abord que g' est continue sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $t > 0$, $g'(t) = \frac{-\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)^2} + \frac{1}{t^2}$: comme $\operatorname{ch} t \underset{t \to +\infty}{\sim} \operatorname{sh} t \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{e^t}{2}$, on en déduit que $g'(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc g' est intégrable sur $[1, +\infty[$.

En utilisant les d.l. de ch et sh en 0 à l'ordre 4, on calcule de même $\lim_0 g' = \frac{-1}{6}$, donc on a une fausse singulatité en 0 : g' est donc intégrable sur $]0, 1]$.

Au total, g' est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q 18.

a) Sous réserve de convergence, pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} \, dt + \int_0^{+\infty} g(t) \sin(xt) \, dt$.

Or par changement de variable $u = xt$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} \, du = \frac{\pi}{2}$ converge, donc la linéarité de l'intégrale est utilisable, ce qui autorise le calcul précédent.

Donc $f(x) = \frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} g(t) \sin(xt) \, dt$.

b) Sous réserve de convergence, on effectue une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} g(t) \sin(xt) \, dt = \left[-\frac{\cos(xt)}{x} g(t) \right]_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} g'(t) \frac{\cos(xt)}{x} \, dt$$

Cette intégration par parties est licite car le crochet de variations vaut 0 grâce aux calculs des limites de g en 0 et $+\infty$.

Il vient donc $\left| \int_0^{+\infty} g(t) \sin(xt) \, dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} g'(t) \frac{\cos(xt)}{x} \, dt \right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left| g'(t) \frac{\cos(xt)}{x} \right| dt \leqslant \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} |g'(t)| \, dt$

donc par encadrement, $\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} g(t) \sin(xt) \, dt = 0$, *i.e.* f a pour limite $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.