e3a MP2 2018
Un corrigé

Partie I

1. Si $a = b$ alors $a_0 = b_0 = a$.
   Si $a_n = b_n = a$ alors $a_{n+1} = b_{n+1}$ (en particulier car $\sqrt{a^2} = |a| = a$).
   On en déduit par récurrence que

$$\boxed{\text{Si } a = b \text{ alors } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont constantes égales à } a}$$

2. Soient $x, y \geq 0$. On a $0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$. On en déduit que

$$\boxed{\forall x, y \geq 0,\ \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}}$$

3. Une récurrence immédiate montre que $\forall n,\ a_n, b_n \geq 0$. Avec la question précédente, on a donc $\forall n,\ a_{n+1} \leq b_{n+1}$ ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leq b_n$$

   Soit $n \geq 1$. On a $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$ et $b_{n+1} \leq \frac{2b_n}{2} = b_n$. Ceci montre que

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ croît et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ décroît}}$$

   Comme $a_n \leq b_n$ pour $n \geq 1$, les suites sont donc dans $[a_1, b_1]$ à partir du rang 1 et donc bornées (bornée équivaut à bornée à partir d'un certain rang).

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bornées}}$$

4. Par théorème de limite monotone, les suites sont convergentes à limite ℓ_a et ℓ_b dans $[a_1, b_1]$ et donc > 0. En pasant à la limite dans la relation de récurrence pour (b_n), on obtient $\ell_a = \ell_b$.

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes de même limite}}$$

5. Notons (a'_n) et (b'_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $a'_0 = b$ et $b'_0 = a$. On a alors $a'_1 = a_1$ et $b'_1 = b_1$. Comme les suites sont récurrentes d'ordre 1, elles sont égale à partir du rang 1 et donc de même limite.
   De même, Notons (α_n) et (β'_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $\alpha_0 = \lambda a_0$ et $\beta_0 = \lambda b$. On a alors $\alpha_1 = \lambda a_1$ et $\beta_1 = \lambda b_1$ puis, par récurrence simple, $\alpha_n = \lambda a_n$ et $\beta_n = \lambda b_n$ pour tout n. Finalement,

$$\boxed{M(b, a) = M(a, b) \text{ et } \forall \lambda > 0,\ M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)}$$

6. On utilise ceci avec $\lambda = 1/a > 0$: $\frac{1}{a}M(a, b) = M(1, b/a) = f(b/a)$. On a donc

$$\boxed{M(a, b) = af\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Partie II

7. $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et équivalent au voisinage des infinis à $1/t^2$ et donc intégrable sur de tels voisinages. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. A fortiori,

$$\boxed{I(a,b) \text{ et } J(a,b) \text{ existent}}$$

La fonction ci-dessus étant paire, son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ vaut celle sur $\mathbb{R}^-$ (par exemple en effectuant le changement de variable $x = -t$). Ainsi, par relation de Chasles

$$\boxed{J(a,b) = 2I(a,b)}$$

8. $s \mapsto \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right)$ qui ne s'annule pas. C'est donc une bonne fonction de changement de variable. Posons $t = \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + t^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4s^2}(s^2 - ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^2(a+b)^2 + (s^2 - ab)^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^4 + (a^2+b^2)s^2 + a^2b^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+a^2)(s^2+b^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{ab})^2 + t^2 &= ab + \frac{1}{4s^2}(s^2 - ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2 + ab)^2
\end{aligned}$$

Par ailleurs, avec les conventions d'écriture usuelles

$$dt = \frac{ds}{2}\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right) = \frac{ds}{2s^2}(s^2 + ab)$$

On en déduit que

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{a^2+s^2)(b^2+s^2)}} = J(a,b)$$

et donc, avce la question précécente

$$\boxed{J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a,b)}$$

9. On prouve ce résultat par récurrence.
   - <u>Initialisation</u> : c'est vrai pour $n = 0$ car $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
   - <u>Hérédité</u> : si le résultat est vrai au rang n alors comme la question précédente donne

   $$2I(a_{n+1}, b_{n+1}) = J(a_{n+1}, b_{n+1}) = 2I(a_n, b_n)$$

   le résultat reste vrai au rang $n+1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I(a_n, b_n) = I(a,b)}$$

10. On veut passer à la limite ci-dessus et, pour cela, utiliser un théorème d'interversion limite-intégrale. On propose le théorème de convergence dominée.
    - $f_n\ :\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a_n^2+t^2)(b_n^2+t^2)}}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
    - La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ elle même continue sur $\mathbb{R}^+$.
    - Comme pour tout $n \geq 1$ on a $a_n, b_n \geq a_1 > 0$ (partie I) on en déduit que

    $$\forall n \geq 1,\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f_n(t)| \leq \frac{1}{a_1^2 + t^2}$$

      Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$ (et indépendant de n).

    Le théorème s'applique et donne

    $$\boxed{I(M(a,b), M(a,b)) = I(a,b)}$$

11. On remarque que

    $$\forall \alpha > 0,\ I(\alpha,\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\alpha^2} = \left[\frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

    Ainsi, avec la question 10,

    $$I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

    ou encore

    $$\boxed{M(a,b) = \frac{\pi}{2I(a,b)}}$$

Partie III

12. $s \mapsto x/s$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée $s \mapsto -x/s^2$ ne s'annule pas. C'est donc une bonne fonction de changement de variable. On obtient

    $$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} &= \int_{+\infty}^{\sqrt{x}} \frac{(-x/s^2)\ ds}{\sqrt{(1+x^2/s^2)(x^2+x^2/s^2)}} \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}\end{aligned}$$

    Par relation de Chasles, on a

    $$I(1,x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}$$

    On conclut ainsi que

    $$\boxed{\forall x > 0,\ I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\ dt}$$

13. Remarquons que

    $$\forall t \geq 0,\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right| = \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} \leq \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

Par convexité de $y \mapsto \sqrt{y}$ (courbe en dessous de la tangente en $y = 1$) on a aussi

$$\forall y \geq -1,\ \sqrt{1+y} \leq 1 + \frac{y}{2}$$

Ainsi,

$$\forall t \in [0, \sqrt{x}],\ \left| \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \right| \leq \frac{x}{2\sqrt{x^2+t^2}}$$

On intégre cette inégalité entre 0 et $\sqrt{x}$ (aucun problème d'existence) pour obtenir

$$\left| I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt \right| \leq 2\int_0^{\sqrt{x}} \left| \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \right| dt \leq x \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

On en conclut donc que

$$\boxed{I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \tfrac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt \text{ est négligeable devant } 2\int_0^{\sqrt{x}} \tfrac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt \text{ quand } x \text{ tend vers } 0^+}$$

14. La dérivée de $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Par changement de variable linéaire $s = t/x$, on. a

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt = \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{ds}{1+s^2} = \left[\ln(s + \sqrt{1+s^2})\right]_0^{1/\sqrt{x}}$$

et finalement,

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

15. On a

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = -\frac{\ln(x)}{2} + \ln(1 + \sqrt{x+1})$$

qui équivaut à $-\ln(x)/2$ quand $x \to 0^+$.
Or, d'après la question 13, quand $x \to 0$

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\, dt$$

On en déduit avec la question 14 que

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$$

Comme $f(x) = M(1,x) = \frac{\pi}{2I(1,x)}$, on a ainsi

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}}$$

16. On a (avec la partie I)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(1, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}M(x,1) = \frac{1}{x}M(1,x) = \frac{1}{x}f(x)$$

Quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0^+$ et la question précédente donne alors

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi x}{2\ln(1/x)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}}$$

17. On sait que
$$\forall x>0,\ f(x) = M(1,x) = \frac{\pi}{2I(1,x)}$$
On va alors prouver que $x \mapsto I(1,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
   - $\forall x>0,\ t\mapsto \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - $\forall t>0,\ x\mapsto \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - $\forall [a,b]\subset \mathbb{R}^{+*},\ \forall x\in[a,b],\ \forall t>0,\ \left|\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(a^2+t^2)}}$. On a vu en question 7 que le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Le théorème évoqué donne $x\mapsto I(1,x)\in C^0(\mathbb{R}^{+*})$ est ainsi (théorèmes d'opération)
$$\boxed{f\in C^0(\mathbb{R}^{+*})}$$

18. La question 15 donne $f(x)\to 0$ quand $x\to 0^+$ et donc
$$\boxed{\text{On prolonge } f \text{ par continuité en posant } f(0)=0}$$
On a aussi
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2x\ln(x)} \to +\infty$$
$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ présente au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale}}$$

19. Avec la question 16,
$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$$
Au voisinage de $+\infty$, on a ainsi une direction asymptotique horizontale. Comme f est de limite infinie en $+\infty$ (toujours la question 16)
$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ présente en } +\infty \text{ une branche parabolique horizontale}}$$

20. L'expression de $I(1,x)$ montre que si $0\le x\le y$, $I(1,x)\ge I(1,y)$. $x\mapsto I(1,x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs >0. Ainsi, avec l'expression rappelée en question 17, $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+}$.

Partie IV

21. Avec les questions 7 et 8,
$$I(1,x) = I\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right)$$
On utilise alors la question 5 avec $\lambda = \frac{1+x}{2}$:
$$M\left(\frac{1+x}{2},\sqrt{x}\right) = \frac{1+x}{2} M\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$
On conclut alors avec la question 11 (utilisée deux fois) que

$$\boxed{I(1,x) = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)}$$

22. (a) On a $w_{n+1} = h(w_n)$ avec $h(t) = \frac{2t}{1+t}$. Comme $h(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et $w_0 \in \mathbb{R}^+$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \geq 0$$

h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}+$ et $\forall t \geq 0,\ h'(t) = \frac{2}{1+t^2} \geq 0$. Ainsi h est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} - w_n = h(w_n) - h(w_{n-1})$$

et la suite $(w_{n+1} - w_n)$ est de signe constant. Mais, $w_1 - w_0 = \frac{x(1-x)}{1+x}$ et donc

- Si $x \geq 1$, (w_n) est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge. Comme $[1, +\infty[$ est stable par h, on a en fait $\forall n,\ w_n \geq 1$. La limite ℓ de (w_n) est ≥ 1 et c'est (par continuité de h) un point fixe de h et donc égal à 0 ou 1. Ainsi, $\ell = 1$.
- Si $x \in]0, 1]$, la suite est de même croissante et convergente vers $\ell \in [x, 1]$ ce qui implique $\ell = 1$.

$$\boxed{(w_n) \text{ converge vers } 1}$$

(b) On procède par récurrence.

- Initialisation : la question 21 donne $I(1, x) = \frac{2}{1+x} I(1, w_1)$, ce qui correspond à la formule pour $n = 0$.
- Hérédité : supposons le résultat vrai à un rang $n \geq 0$. La question 21 donne

$$I(1, w_{n+1}) = \frac{1}{2 + w_{n+1}} I(1, w_{n+2})$$

Par le résultat au rang n, on déduit celui au rang $n + 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I(1, x) = I(1, w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1 + w_k}}$$

(c) On a vu en question 17 que $x \mapsto I(1, x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, $I(1, w_{n+1}) \to I(1, 1) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que (p_n) converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\pi}{2I(1, x)}$$

$$\boxed{\text{En notant } \ell \text{ la limite de } (p_n), \text{ on a } \ell I(1, x) = \tfrac{\pi}{2}}$$

Partie V

23. Soit $x \in] - 1, 1[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc $|x \sin(t)| < 1$ et donc $1 - x^2 \sin^2(t) > 0$. Ainsi, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2(t)}}$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$ et son intégrale sur ce segment existe.

$$\boxed{K \text{ est bien définie sur }] - 1, 1[}$$

24. $t \mapsto \arctan(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ à dérivée ne s'annulant pas et c'est donc un bon changement de variable. Il donne

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1/\cos^2(s)}{\sqrt{(1+\tan^2(s))(x^2+\tan^2(s))}}\, ds \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{x^2\cos^2(s)+\sin^2(s)}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x>0,\ I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2(t)+\sin^2(t)}}}$$

25. Comme $\sin^2 = 1-\cos^2$, on a donc

$$I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-(1-x^2)\cos^2(t)}}$$

Le changement affine $u = \pi/2 - t$ donne alors

$$I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-(1-x^2)\sin^2(u)}}$$

Quand $x \in]0,1[$, $1-x^2>0$ et est égal au carré de sa racine carrée et ainsi

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ I(1,x) = K(\sqrt{1-x^2})}$$

26. (a) On a

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)(1-\sin^2(t))\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin^{2n}(t)\cos(t)\, dt$$

$u'(t) = \cos(t)\sin^{2n}(t)$ se primitive en $u(t) = \frac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}(t)$ et $v(t) = \cos(t)$ se dérive en $v'(t) = -\sin(t)$. $u, v \in C^1([0,\pi/2])$ et on peut intégrer par parties pour obtenir

$$W_n - W_{n+1} = [u(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t)\, dt = \frac{1}{2n+1} W_{n+1}$$

On conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n}$$

(b) On prouve le résultat par récurrence.

- Initialisation : $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et le résultat est vrai au rang 0.
- Hérédité : on suppose le résultat vrai au rang n. Avec la question précédente, et en écrivant $\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2}$,

$$W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}\pi$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi}$$

27. Le cours nous dit que $g \ : \ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est DSE de rayon 1. Son développement est alors donné par Taylor :

$$\forall t \in]-1,1[, \ g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

On montre par récurrence que

$$g^{(n)}(t) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} (1-t)^{-\frac{2n+1}{2}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} (1-t)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$\boxed{\forall t \in]-1,1[, \ g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n}$$

28. Il nous suffit alors d'appliquer l'égalité en $(x\sin(t))^2$ (qui est dans $]-1,1[$) :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)}$$

29. A ce niveau, on a

$$\forall x \in]-1,1[, \ K(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t) \ dt$$

On veut intervertir les symboles. On va utiliser le théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions. Ici, $x \in]-1,1[$ est fixé.

- $f_n \ : \ t \mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \sin^{2n}(t)$ est le terme général d'une série de fonctions continues qui converge simplement sur $[0,\pi/2]$ vers $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}$ elle même continue.
- Comme les fonctions sont positives,

$$\forall t \in [0,\pi/2], \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}$$

  Le majorant est continu sur le segment $[0,\pi/2]$ et donc intégrable sur ce segment.

Le théorème s'applique et donne

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t) \ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} W_n$$

Il reste à utiliser l'expression de W_n pour conclure que

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \ K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{16^n (n!)^4} x^{2n}}$$

30. On a

$$M(3,5) = M(5,3) = 5M(1,3) = \frac{5\pi}{2} \frac{1}{I(1,3/5)} = \frac{5\pi}{2} \frac{1}{K(4/5)}$$

On déduit $M(3,5)$ de $K(4/5)$ dont on a une expression sous forme de somme de série numérique.