Problème 1 - Autour de la moyenne arithmetico-géométrique

Les parties sont largement indépendantes, mais le candidat pourra admettre les résultats des parties intermédiaires. Les notations sont conservées d'une partie à l'autre.

I. Moyenne arithmético-géométrique de deux réels

Soient a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$a_0 = a \text{ et } b_0 = b$$
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Q 1. Que dire des suites (a_n) et (b_n) si $a = b$?

Q 2. Montrer que si $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on a

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

Q 3. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, puis qu'elles sont bornées.

Q 4. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite strictement positive, qu'on notera $M(a, b)$.

On définira la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = M(1, x)$.

Q 5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, exprimer en fonction de λ et $M(a, b)$ les quantités suivantes :

$$M(b, a) \quad \text{et} \quad M(\lambda a, \lambda b)$$

Q 6. Justifier que $M(a, b) = af\left(\frac{b}{a}\right)$.

II. Une expression intégrale de $M(a, b)$

Pour a, b deux nombres réels strictement positifs, on considère les intégrales

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} \quad \text{et} \quad J(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$$

Q 7. Justifier que les intégrales $I(a, b)$ et $J(a, b)$ convergent, puis que $J(a, b) = 2I(a, b)$.

Q 8. En effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$, montrer que

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2I(a, b)$$

Q 9. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I(a_n, b_n) = I(a, b)$$

Q 10. Justifier que

$$I(M(a, b), M(a, b)) = I(a, b)$$

On énoncera précisément le théorème utilisé.

Q 11. Conclure que

$$M(a, b) = \frac{\pi}{2I(a, b)}$$

III. Propriétés de la fonction f

Q 12. On fixe $x > 0$. En effectuant le changement de variable $t = \frac{x}{s}$, montrer que

$$I(1, x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\, dt$$

Q 13. Montrer que $I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$ est négligeable devant $2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$ quand x tend vers 0^+.

Q 14. Dériver $t \mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$ et en déduire une expression réduite pour $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$.

Q 15. Déterminer un équivalent simple de $I(1,x)$ en $x=0^+$ et en déduire que

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}$$

Q 16. Pour $x>0$, en déduire que

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}$$

Q 17. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q 18. Montrer que l'on peut prolonger par continuité la fonction f en 0. Que dire de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 de la fonction ainsi prolongée ?

Q 19. Que dire de la branche infinie de la courbe f en $+\infty$.

Q 20. Préciser rapidement les variations de f et tracer sa courbe sur $]0,+\infty[$.

IV. Une suite qui converge vers f

Pour $x>0$, on définit la suite $(w_n(x))$ par $w_0(x)=x$ et $w_{n+1}(x) = \dfrac{2\sqrt{w_n(x)}}{1+w_n(x)}$.

Q 21. On pose $h : t \mapsto \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}$. Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$, qu'elle est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$, et que l'équation $h(t)=t$ a pour seule solution $t=1$ dans $]0,+\infty[$.

Q 22. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $h(t)\in\,]0,1]$. En déduire que pour tout $x>0$, la suite $(w_n(x))$ est croissante à partir du rang 1 et converge vers 1.

On a donc défini une suite de fonctions (w_n) qui converge simplement vers 1 sur $]0,+\infty[$.

Q 23. Soit $a>1$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[1,a]$, $w_n(x)\in[w_n(a),1]$.

b) En déduire qu'il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n\geqslant N$ et $x\in[1,a]$, $|w_{n+1}(x)-1| \leqslant \frac{1}{2}|w_n(x)-1|$.

c) Montrer que la suite de fonctions (w_n) converge uniformément sur le segment $[1,a]$.

Q 24. Montrer que

$$I(1,x) = \frac{2}{1+x} I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

En déduire que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ I(1,x) = I(1,w_{n+1}(x)) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k(x)}$$

Q 25. Soit la suite de fonctions (p_n) définie par

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{1+w_k}{2}$$

Montrer que la suite (p_n) converge simplement vers f sur $[1,+\infty[$

Q 26. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(\frac{1+w_k}{2}\right)$ converge normalement sur tout segment $[1,a]$ pour $a>1$. En déduire que la suite (p_n) converge uniformémement sur tout segment $[1,a]$.

V. Un autre calcul de f

On définit la fonction K par

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(t)}}\,dt$$

Q 27. Montrer que la fonction K est bien définie sur $]-1,1[$.

Q 28. En effectuant un changement de variable, montrer que

$$I(1,x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2(t)+\sin^2(t)}}$$

Q 29. Montrer que si $x \in]0,1]$, on a

$$I(1,x) = K(\sqrt{1-x^2})$$

Q 30. On définit la suite d'intégrales (W_n) par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\, dt$$

a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$$

On pourra considérer la quantité $W_n - W_{n+1}$.

b) Démontrer que

$$W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$$

On admettra que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$$

Q 31. Justifier que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{16^n (n!)^4} x^{2n}$$

Q 32. En déduire une série numérique permettant d'obtenir la valeur de $M(3,5)$.