

Problème 1 - Autour des matrices de Toeplitz

Dans tout le problème, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} , n un entier naturel supérieur ou égal à 2, \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Si $(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$, on note $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})$ la matrice

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est appelée *matrice de Toeplitz* d'ordre n . On nomme $\text{Toep}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} :

$$\text{Toep}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}, M = T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})\}$$

Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$. On admettra qu'une telle matrice vérifie $N^n = 0$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.

Si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ ($p \in \mathbb{N}$) est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $P(M)$ désigne la matrice

$$P(M) = a_0I_n + a_1M + \dots + a_pM^p$$

I. Généralités et quelques exemples

- Q 1.** Montrer que $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En donner une base et en préciser la dimension.
- Q 2.** Montrer que si deux matrices A et B commutent ($AB = BA$) et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, alors $P(A)$ et $Q(B)$ commutent.

Cas de la dimension 2 (questions 3 à 6)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz de taille 2×2 , où (a, b, c) sont des complexes.

- Q 3.** Donner le polynôme caractéristique de A .
- Q 4.** Discuter, en fonction des valeurs de (a, b, c) , de la diagonalisabilité de A .
- Q 5.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.
- Q 6.** En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales (questions 7 à 13)

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de la forme $T(0, \dots, 0, t_{-1}, t_0, t_1, 0, \dots, 0)$, i.e. une matrice de la forme

$$A_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a, b, c) sont des complexes.

On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a, b, c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

- Q 7.** Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors (x_1, \dots, x_n) sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0, x_{n+1} = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$
- Q 8.** Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation $bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0$ (1)
- Q 9.** À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1} , montrer que l'équation (1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 .
- Q 10.** Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que r_1/r_2 appartient à \mathbb{U}_{n+1} .
- Q 11.** En utilisant l'équation l'équation (1) satisfaite par r_1 et r_2 , déterminer $r_1 r_2$ et $r_1 + r_2$. En déduire qu'il existe un entier $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que

$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

- Q 12.** En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $\llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $x_k = 2i\alpha \frac{\rho^k}{b^k} \sin\left(\frac{\ell k \pi}{n+1}\right)$.
- Q 13.** Conclure que $A_n(a, b, c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

II. Matrices circulantes

Une matrice *circulante* est une matrice de Toeplitz $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})$, pour laquelle

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, t_k = t_{-n+k}$$

Elle est donc de la forme

$$T(t_1, t_2, \dots, t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & t_{n-2} \\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

On pose $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\omega_n = e^{2i\pi/n}$.

- Q 14.** Calculer M_n^2, \dots, M_n^n . Montrer que M_n est inversible et donner un polynôme annulateur de M_n .
- Q 15.** Justifier que M_n est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres (exprimées à l'aide de ω_n) et donner une base de vecteurs propres de M_n .
- Q 16.** On pose $\Phi_n = (\omega_n^{(p-1)(q-1)})_{1 \leq p, q \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que Φ_n est inversible et donner sans calcul la valeur de la matrice $\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n$.
- Q 17.** Soit A une matrice circulante. Donner un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$.
- Q 18.** Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer, à l'aide d'une division euclidienne de P par un polynôme bien choisi, que $P(M_n)$ est une matrice circulante.
- Q 19.** Montrer que l'ensemble des matrices circulantes est un sous-espace vectoriel de $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$, stable par produit et par transposition.
- Q 20.** Montrer que toute matrice circulante est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.