Compléments sur les nombres réels

1 Réels et rationnels

1.1 Propriété d'Archimède

Proposition 1. *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y < nx$.*

On dit que $\mathbb{R}$ est un corps archimédien.

1.2 Partie entière

Proposition 2. *Soit x un réel. Il existe un unique entier relatif p tel que $p \leqslant x < p + 1$.*

Définition. Soit x un réel. L'entier p dont l'existence est assurée par la proposition précédente est appelé la partie entière de x, notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Remarque. On ne confondra pas la notion de partie entière et celle de troncature (ou arrondi). Pour les réels positifs, ces deux notions coïncident : la partie entière de $1,41$ est 1. En revanche pour les réels négatifs, en général, ces deux notions sont différentes : la troncature de -1.41 est -1, alors que la partie entière de -1.41 est -2.

Proposition 3. *Soit x un réel, p sa partie entière.*
Alors p est le plus grand entier n tel que $n \leqslant x$ et $p + 1$ est le plus petit entier n tel que $x < n$.

Autrement dit, de manière formalisée, on a :

$$p = \lfloor x \rfloor \iff \begin{cases} p \in \mathbb{Z} \\ \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad n \leqslant x \Rightarrow n \leqslant p \end{cases}$$

Remarque. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose souvent $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à x.

1.3 Approximations décimales d'un réel

Définition. Soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \lfloor 10^n x \rfloor$ puis $u_n = \dfrac{p_n}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{p_n + 1}{10^n}$: u_n et v_n sont appelés les approximations décimales de x à 10^{-n} prés par défaut et par excés respectivement.

Par définition de la partie entière, on a $u_n \leqslant x < v_n = u_n + \dfrac{1}{10^n}$.

Proposition 4. *Les deux suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante et convergent vers x (elles sont donc adjacentes).*

Corollaire 1. *Tout réel est la limite d'une suite de nombres rationnels.*

1.4 Parties denses

Définition. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ quand tout réel est la limite d'une suite à termes dans A.

On peut caractériser différemment la densité.

Proposition 5. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*
Alors A est dense dans $\mathbb{R}$ si et s.si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x < y \Rightarrow \exists a \in A \; x < a < y,$

Autrement dit, A est dense dans $\mathbb{R}$ quand entre deux réels quelconques il existe une infinité d'éléments de A.

Le paragraphe précédent justifie donc la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, mais aussi celle de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

2 Propriété de la borne supérieure

2.1 Maximum et minimum d'une partie

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
- On dit que A est majorée quand il existe un réel m tel que pour tout $x \in A$, $x \leqslant m$.
  Tout réel m qui satisfait cette définition est appelé un majorant de A.
- On dit que A est minorée quand il existe un réel m tel que pour tout $x \in A$, $m \leqslant x$.
  Tout réel m qui satisfait cette définition est appelé un minorant de A.
- On dit que A est bornée quand A est à la fois majorée et minorée.

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
- On dit que A possède un maximum quand il existe un réel $m \in A$ tel que pour tout $x \in A$, $x \leqslant m$, autrement dit si A possède un majorant qui en plus appartient à A. Dans ce cas, m est unique et est appelé maximum de A, noté $\max A$.
- On dit que A possède un minimum quand il existe un réel $m \in A$ tel que pour tout $x \in A$, $m \leqslant x$, autrement dit si A possède un minorant qui en plus appartient à A. Dans ce cas, m est unique et est appelé minimum de A, noté $\min A$.

Remarque. Toute partie de $\mathbb{R}$ qui possède un maximum est majorée, mais la réciproque est fausse. Par exemple, l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$ est majoré (par 2, ou 1), mais ne possède pas de maximum.
C'est pour pallier à ce manque qu'on introduit une notion nouvelle.

2.2 Bornes supérieure, inférieure d'une partie

Théorème 1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, qu'on suppose non vide et majorée. Alors parmi tous les majorants de A, il en existe un minimal : on l'appelle borne supérieure de A, notée* $\sup A$.
Autrement dit, toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure, qui est le plus petit de ses majorants.

De même, toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et minorée possède une borne inférieure, qui est le plus grand de ses minorants, notée $\inf A$.

La notion de borne supérieure partage des propriétés avec celle de maximum, comme la suivante :

Proposition 6. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et K un réel.*
- *Si A possède un maximum et si pour tout $x \in A$, $x \leqslant K$, alors* $\max A \leqslant K$ *;*
- *Si pour tout $x \in A$, $x \leqslant K$, alors A possède une borne supérieure et* $\sup A \leqslant K$ *;*

Remarque. Attention ! À la différence du maximum de A, qui appartient toujours à A, la borne supérieure de A n'appartient pas forcément à A.

2.3 Caractérisation équivalente

Proposition 7. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et s un réel.*
Alors $s = \sup A$ si et seulement si s est un majorant de A et il existe une suite u à termes dans A qui converge vers s.

De même, si A est une partie non vide et minorée, alors $s = \inf A$ si et seulement si s est un minorant de A et il existe une suite u à termes dans A qui converge vers s.

2.4 Bornes supérieure, inférieure d'une fonction

Définition. Soit X un ensemble non vide et f une application de X dans $\mathbb{R}$.
- On dit que f est majorée sur X quand il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X$, $f(x) \leqslant m$, autrement dit si $f(X)$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
- On dit que f est minorée sur X quand il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X$, $m \leqslant f(x)$, autrement dit si $f(X)$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$.
- On dit que f est bornée sur X quand f est à la fois majorée et minorée sur X, autrement dit quand $|f|$ est majorée sur X, ou encore quand $f(X)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

Proposition 8. *Soit X un ensemble non vide et f une application de X dans $\mathbb{R}$.*
Si f est majorée sur X, alors $f(X)$ est un partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée donc possède une borne supérieure, qu'on appelle borne supérieure de f sur X, notée $\sup\limits_X f$ ou $\sup\limits_{x \in X} f(x)$.
Si f est minorée sur X, alors $f(X)$ est un partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée donc possède une borne inférieure, qu'on appelle borne inférieure de f sur X, notée $\inf\limits_X f$ ou $\inf\limits_{x \in X} f(x)$.

On déduit de la proposition 7 la caractérisation suivante.

Proposition 9. *Soit X un ensemble non vide, f une application de X dans $\mathbb{R}$, majorée sur X et s un réel.*
Alors $s = \sup\limits_X f$ si et seulement si s est un majorant de f sur X et il existe une suite (u_n) à termes dans X tel que la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers s.

De même, on étend le résultat de la proposition 6.

Proposition 10. *Soit f une application de X dans $\mathbb{R}$ et K un réel.*
Si pour tout $x \in X$, $f(x) \leqslant K$, alors $\sup\limits_X f$ existe et $\sup\limits_X f \leqslant K$.

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

3.1 Types d'intervalles

Il existe 9 types d'intervalles (a, b désignent ici deux réels) :
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$ (si $a \geqslant b$, alors $]a, b[= \varnothing$) ;
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x\}$
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\}$
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leqslant b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x \leqslant b\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x\}$
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leqslant a\}$

Les quatre premiers types d'intervalles sont les intervalles dits ouverts. Les trois derniers sont dits fermés. Les intervalles dont les deux bornes sont réelles sont bornés.

3.2 Parties convexes de $\mathbb{R}$

Démontrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est un intervalle grâce à la définition nécessite de traiter jusqu'à 9 cas. On peut faire plus simple.

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (éventuellement vide).
On dit que A est convexe quand $\quad \forall(x,y) \in A^2 \quad x \leqslant y \Rightarrow [x,y] \subset A$.

On a alors le résultat suivant permettant de montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est un intervalle.

Proposition 11. *Une partie de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est convexe.*

4 Définition axiomatique de $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est vraiment un objet très particulier : $\mathbb{R}$ est le seul corps totalement ordonné qui vérifie le th. de la limite monotone (c'est notre axiome).

Un corps est un ensemble qui possède une addition et une multiplication vérifiant les propriétés classiques. Un corps totalement ordonné est un corps muni d'une relation d'ordre compatible avec ces deux opérations :
$\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z$
$\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \quad x \leqslant y \Rightarrow xz \leqslant yz$

En fait, la présentation habituelle de $\mathbb{R}$ le donne comme le seul corps totalement ordonné qui vérifie le th. de la borne supérieure.

On peut démontrer que ces deux définitions sont équivalentes : tout le cours sur les suites et celui-ci montrent que dans un corps totalement ordonné vérifiant le th. de la limite monotone, alors le th. de la borne supérieure est vrai ; réciproquement, dans un corps totalement ordonné vérifiant le th. de la borne supérieure, toute suite croissante majorée converge.

Il existe encore de nombreuses autres façons de caractériser $\mathbb{R}$. Mais ce qui est important est que toutes ses définitions définissent des ensembles isomorphes : il n'existe qu'un et un seul modèle de corps totalement ordonné vérifiant le th. de la borne supérieure, c'est $\mathbb{R}$.

Exemples.
- $\mathbb{R}$ peut être défini comme un ensemble d'ensembles de suites de nombres rationnels
- $\mathbb{R}$ peut être défini comme un ensemble d'ensembles de suites constituées d'un entier relatif suivi d'entiers naturels compris entre 0 et 9
- $\mathbb{R}$ peut être défini comme un ensemble de couples de parties de $\mathbb{Q}$.
- et sans doute encore beaucoup d'autres définitions que j'ignore