

## 1 Suites et séries de fonctions

Toutes les fonctions sont de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  pour commencer.

- a) Suites de fonctions : convergence simple, convergence uniforme. La convergence uniforme est définie à l'aide de la norme sup ; définition d'une majoration uniforme. Lien entre les deux types de convergence.
- b) Séries de fonctions : convergence simple, uniforme, normale. Liens entre ces types de convergence.
- c) Préservation de la monotonie par limite simple. Préservation de la continuité par limite uniforme, contre-exemple avec de la convergence simple seulement.
- d) Interversion de limites et d'intégrales sur des segments.
- e) Th. de la double limite.
- f) Déivation de la limite d'une suite ou série de fonctions de classe  $C^1$ . Généralisation aux fonctions de classe  $C^k$ .
- g) Généralisation rapide aux suites et séries de fonctions de  $E$  dans  $F$ , deux e.v. de dimensions finies.
- h) Approximation uniforme sur un segment des fonctions continues par morceaux par les fonctions en escaliers, des fonctions continues par les polynômes (th. de Stone-Weierstrass).

## 2 Séries entières

- a) Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence  $R$  d'une série entière ; si  $|z| < R$ , il y a convergence absolue de la série entière, si  $|z| > R$ , divergence grossière et indétermination quand  $|z| = R$ . Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.
- b) Calcul ou estimation du rayon de convergence : diverses idées pour calculer le rayon, entre autres, la règle de d'Alembert. Comparaison de séries entières. Somme, produit de Cauchy de séries entières. Invariance du rayon de convergence par produit des coefficients par un polynôme en  $n$ .
- c) Convergence normale sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence. Continuité de la somme dans le disque ouvert de convergence. Caractère  $C^\infty$  de la somme d'une série entière dans l'intervalle ouvert de convergence, déivation, intégration terme à terme d'une série entière. Th. de convergence radiale d'Abel.
- d) Fonctions développables en série entière, série de Taylor d'une fonction  $C^\infty$ , opérations sur les fonctions développables en série entière, unicité du d.s.e. Développements des fonctions usuelles.