Sujet inspiré par Mines 2011 MP.

Problème 1 - Critère de diagonalisabilité de Klarès

Soit n un entier naturel non nul et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre n à coefficients complexes. On note O_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. La *trace* d'une matrice U de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est notée $\mathrm{tr}(U)$.

On dit que deux matrices U et V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *commutent* si $UV = VU$. Une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $N^k = O_n$.

Si u et v sont deux endomorphismes, on convient de ne pas écrire le symbole de composition : uv signifie $u \circ v$.

Dans tout le problème, on considère une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on note f l'endomorphisme de $F = \mathbb{C}^n$ canoniquement associé, c'est-à -dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A. Le polynôme caractéristique de A est noté P et les valeurs propres complexes distinctes de A sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note :
- α_i l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i, c'est-à -dire l'ordre de multiplicité de la racine λ_i du polynôme P ;
- P_i le polynôme défini par : $P_i(X) = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$;
- F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_i}\right)$;
- f_i l'endomorphisme de F_i obtenu par restriction de f à F_i.

La partie III à l'exception de la question 17), est indépendante des parties I et II.La partie IV est indépendante des parties précédentes.

L'objectif des parties I et II est de démontrer le résultat suivant :

il existe un unique couple $(d, u) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que
- d est diagonalisable,
- u est nilpotent,
- $du = ud$
- $f = d + u$.

Ces quatre conditions sont notées conditions (DC).

I. Existence

Dans cette partie, on redémontre des résultats du cours. Il est donc attendu des preuves reposant sur d'autres résultats de cours et non pas de simples invocations du dit cours.

Q 1. Rappeler sans démonstration l'énoncé du lemme des noyaux.

Q 2. Montrer que $F = \bigoplus_{j=1}^{r} F_j$.

Q 3. Montrer que pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $\dim F_j = \alpha_j$.

Q 4. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs selon le schéma ci-dessous :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + U_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{\alpha_2} + U_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + U_r \end{pmatrix}$$

où les matrices U_j sont strictement triangulaires supérieures.

Q 5. Montrer qu'il existe un couple (d, u) satisfait les conditions (DC).

II. Unicité

Q 6. Soit $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ une matrice diagonale par blocs telle que les polynômes minimaux μ_A et μ_B de A et B respectivement sont premiers entre eux. Montrer que le polynôme minimal de M est $\mu_A \mu_B$.

Q 7. Soit A, B deux matrices carrées à coefficients complexes dont les polynômes minimaux sont premiers entre eux, et P, Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $R(A) = P(A)$ et $R(B) = Q(B)$.

Q 8. Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & A_r \end{pmatrix}$ une matrice diagonale par blocs telles que les polynômes minimaux des matrices carrées $A_1, \dots, A_r$ sont premiers entre eux deux à deux. Montrer que pour tous polynômes $P_1, \dots, P_r$, il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\begin{pmatrix} P_1(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2(A_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & P_r(A_r) \end{pmatrix} = R(M)$.

Q 9. Soit (d, u) un couple satisfaisant les conditions (DC). Montrer qu'il existe deux polynômes P, Q tels que $d = P(f)$ et $u = Q(f)$.

Q 10. On admet le théorème suivant : si a et b sont deux endomophismes diagonalisables qui commutent (*i.e.* $ab = ba$), alors $a + b$ est diagonalisable.

Montrer l'unicité de la décomposition (DC).

Un exemple pour $n = 3$:

Q 11. Calculer la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

III. Commutation et conjugaison

Pour toute matrice B et toute matrice inversible P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note comm_B et conj_P les endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \begin{cases} \mathrm{comm}_B(X) = BX - XB \\ \mathrm{conj}_P(X) = PXP^{-1}. \end{cases}$$

Le but de cette partie est de démontrer que A est diagonalisable si et seulement si comm_A est diagonalisable.

Q 12. Soit P une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P$.

Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui est égal à 1.

Q 13. Si A est une matrice diagonale, montrer que, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, comm_A admet $E_{i,j}$ comme vecteur propre. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de comm_A.

Q 14. En déduire que si A est diagonalisable, comm_A l'est aussi.

Q 15. Montrer que si A est nilpotente, comm_A l'est également, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $(\mathrm{comm}_A)^k$ est l'endomorphisme nul de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 16. Montrer que si A est nilpotente et si comm_A est l'endomorphisme nul, alors A est la matrice nulle.

D'après la partie I, l'endomorphisme comm_A admet une décomposition de Dunford de la forme $\mathrm{comm}_A = d + n$, où les endomorphismes diagonalisable d et nilpotent n commutent : $dn = nd$.

Q 17. Déterminer la décomposition de Dunford de comm_A à l'aide de celle de A et conclure.

IV. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

Soit p un entier > 0 et E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{C}$. On note E^* le dual de E, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

On considère une forme bilinéaire symétrique b sur E, c'est-à-dire une application $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ *linéaire par rapport à chacune des composantes* et telle que $b(x, y) = b(y, x)$ pour tous $x, y \in E$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle *orthogonal de F relativement à b* le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$F^{\perp b} = \{x \in E ; \forall y \in F, b(x, y) = 0\}.$$

On suppose que b est *non dégénérée*, c'est-à-dire que $E^{\perp b} = \{0\}$.

Q 18. Soit u un endomorphisme de E. Démontrer les implications suivantes :

$$(i) : u \text{ est diagonalisable} \quad \Rightarrow \quad (ii) : \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \quad \Rightarrow \quad (iii) : \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}.$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension q et soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_q)$ une base de F. Pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on note φ_i la forme linéaire sur E définie par : $\varphi_i(x) = b(\varepsilon_i, x)$.

Q 19. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_q)$ est une famille libre de E^*.

On complète cette famille en une base $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base de E *antéduale* (dont $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p)$ est la base duale).

Q 20. Montrer que $F^{\perp b}$ est engendré par $(e_{q+1}, e_{q+2}, \cdots, e_p)$ et en déduire la valeur de $\dim(F) + \dim(F^{\perp b})$.

V. Critère de Klarès

Le but de cette partie est de démontrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A) = \mathrm{Ker}\left((\mathrm{comm}_A)^2\right)$.

Q 21. Montrer que l'application φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$\forall X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \quad \varphi(X, Y) = \mathrm{tr}(XY)$$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

Q 22. Établir l'égalité : $(\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A))^{\perp \varphi} = \mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A)$.

Q 23. En déduire que, si A est nilpotente, il existe une matrice X de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = \mathrm{comm}_A(X)$.

Calculer alors $\mathrm{comm}_{A+\lambda I_n}(X)$ pour tout λ dans $\mathbb{C}$.

Soit D et N les matrices de la décomposition de Dunford de A définies à la question **Q 5**.

Q 24. Démontrer qu'il existe une matrice X de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N = \mathrm{comm}_A(X)$.

Q 25. Conclure.

Problème 1

Je remercie ma camarade Édith Méthou de Besançon pour le corrigé à partir de la question **Q 11**.

I.

Q 1. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(F)$, $P = \prod_{j=1}^{k} P_k$ un produit de k polynômes $P1, \dots, P_k$ premiers entre eux deux à deux. Alors $\operatorname{Ker} P(f) = \bigoplus_{j=1}^{k} \operatorname{Ker} P_k(f)$.

Q 2. Le polynôme caractéristique de f s'écrit $\chi_f = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$, produit des k polynômes premiers entre eux deux à deux $(X - \lambda_1)^{\alpha_1}, \dots, (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$. Or d'après le th. de Cayley-Hamilton, P est annulateur de f. Donc en appliquant le lemme des noyaux précédent, on obtient

$$F = \operatorname{Ker} \chi_f(f) = \bigoplus_{j=1}^{r} \operatorname{Ker}(f - \lambda_j \operatorname{Id}_F)^{\alpha_j}$$

Q 3. D'après le décomposition en somme directe précédente, comme tous les sous-espaces $F_j = \operatorname{Ker}(f - \lambda_j \operatorname{Id}_E)^{\alpha_j}$ sont stables par f, f induit un endomorphisme f_j sur chaque sous-espace F_j.

Il est alors évident que pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $(f_j - \lambda_j \operatorname{Id}_{F_j})^{\alpha_j} = 0$ donc f_j a pour polynôme annulateur $(X - \lambda_j)^{\alpha_j}$: son polynôme minimal est donc de la forme $(X - \lambda_j)^{\gamma_j}$ où $\gamma_j \leqslant \alpha_j$, donc son polynôme caractéristique, qui a les mêmes racines, est de la forme $(X - \lambda_j)^{\beta_j}$ où $\beta_j = \dim F_j \geqslant \gamma_j$.

Or le polynôme caractéristique de f est le produit des polynômes caractéristiques des endomorphismes induits f_j : $\chi_f = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{\beta_j}$.

Donc par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $\dim F_j = \beta_j = \alpha_j$.

Q 4. Chaque endomorphisme induit f_j est trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est $(X - \lambda_j)^{\alpha_j}$ donc est scindé. Donc il est trigonalisable : il existe une base $\mathscr{B}_j$ de E_j telle que la matrice A_j de f_j dans la base $\mathscr{B}_j$ soit triangulaire supérieure. Or la seule valeur propre de f_j est λ_j, donc $A_j = \lambda_j \operatorname{Id}_{\alpha_j} + U_j$ où U_j est strictement triangulaire supérieure.

Comme $F = \bigoplus_{j=1}^{r} F_j$, somme de sous-espaces stables par f, on obtient en concaténant les bases $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_r$ une base de F dans laquelle la matrice de f est de la forme voulue.

Q 5. On pose d l'endomorphisme de matrice

$$\operatorname*{mat}_{\mathscr{B}} d = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{\alpha_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix}$$

d est évidemment diagonalisable puisque sa matrice dans une base est diagonale. Quant à u, sur chaque sous-espace F_j, il induit un endomorphisme u_j nilpotent d'indice inférieur ou égal à α_j, donc u est nilpotent d'indice inférieur ou égal à $\max(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

Comme chaque endomorphisme $\lambda_j \operatorname{Id}_{F_j}$ commute avec tout endomorphisme de F_j, il commute avec f_j, donc avec $u_j = f_j - \lambda_j \operatorname{Id}_{F_j}$.

Comme $F = \bigoplus_{j=1}^{k} F_j$, somme de sous-espaces stables par f, d commute avec f, donc avec u.

II.

Q 6. Si P est annulateur de M, alors $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} = 0$, donc $P(A) = P(B) = 0$ donc μ_A et μ_B divisent P. Or μ_A et μ_B sont premiers entre eux, donc $\mu_A\mu_B$ divise P.

On a montré que tous les polynômes annulateurs de M sont divisibles par $\mu_A\mu_B$, qui est de manière évidente un polynôme annulateur de M

Donc $\mu_A\mu_B$ est le polynôme unitaire de degré minimal qui annule la matrice M, *i.e.* $\mu_M = \mu_A\mu_B$.

Q 7. **Analyse.** Si R existe, alors $R - P$ est annulateur de A et $R - Q$ est annulateur de B, donc μ_A divise $R - P$ et μ_B divise $R - Q$:

il existe U, V deux polynômes tels que $R - P = U\mu_A$ et $R - Q = V\mu_B$, donc par soustraction, $Q - P = U\mu_A - V\mu_B$.

Synthèse. μ_A et μ_B sont premiers entre eux, donc d'après le th. de Bézout, il existe deux polynômes U_0, V_0 tels que $1 = U_0\mu_A + V_0\mu_B$, donc $Q - P = (Q - P)U_0\mu_A - (P - Q)V_0\mu_B$.

On pose alors $R = P + (Q - P)U_0\mu_A$: il est alors évident que $R(A) = P(A)$. Mais on a aussi $R = Q + (P - Q)V_0\mu_B$ donc $R(B) = Q(B)$.

R convient donc.

Q 8. Par récurrence sur k : on pose $\mathscr{P}(k)$ le prédicat énoncé de la question (j'ai remplacé la lettre r par la lettre k), auquel on ajoute que le polynôme minimal de M est $\mu_{A_1} \dots \mu_{A_k}$.

Le cas $k = 1$ est immédiat. $\mathscr{P}(2)$ est vraie grâce aux deux questions précédentes.

Si $\mathscr{P}(k-1)$ est vraie ($k \geqslant 2$), alors on se place dans les bonnes hypothèses de l'implication $\mathscr{P}(k)$ et on écrit $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ en posant $N = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, la matrice $\begin{pmatrix} P_2(A_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_3(A_3) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & P_k(A_k) \end{pmatrix}$ peut s'écrire $Q(N)$ où Q est un polynôme et le polynôme minimal de N est $\mu_{A_2} \dots \mu_{A_k}$, qui est premier avec μ_{A_1}. Donc d'après la question 7, il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\begin{pmatrix} P_1(A_1) & 0 \\ 0 & Q(N) \end{pmatrix} = R(M)$, ce qui donne $R(M) = \begin{pmatrix} P_1(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2(A_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & P_k(A_k) \end{pmatrix}$.

De plus, d'après la question 6, $\mu_M = \mu_{A_1}\mu_N = \mu_{A_1} \dots \mu_{A_k}$.

Donc $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

Q 9. (d, u) est un couple satisfaisant les conditions (DC), donc E est la somme directe des sous-espaces propres de d, notées $E_1, \dots, E_k$, les valeurs propres associées étant $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ respectivement.

Comme u commute avec d, chacun des sous-espaces propres est stable par u et donc par f, donc u induit sur chaque E_j un endomorphisme nilpotent u_j. Il existe alors une base $\mathscr{B}_j$ de E_j dans laquelle la matrice de u_j est strictement triangulaire supérieure et donc l'endomorphisme f_j induit par f a pour matrice $A_j = \lambda_j I_{\alpha_j} + U_j$ où U_j est strictement triangulaire supérieure et a pour polynôme minimal un diviseur de $(X - \lambda_j)^{\alpha_j}$.

Les polynômes minimaux des matrices $A_1, \dots, A_k$ sont par conséquent premiers entre eux deux à deux.

Or pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $U_j = A_j - \lambda_j I_{\alpha_j} = P_j(A_j)$ en posant $P_j = X - \lambda_j$. Donc en concaténant les bases des sous-espaces E_j, on obtient une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} P_1(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2(A_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & P_r(A_r) \end{pmatrix}$

et celle de f est $M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & A_r \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, il existe un polynôme Q tel que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}\, u = Q(M)$, *i.e.* $u = Q(f)$, et donc $d = f - Q(f) = (X - Q)(f)$.

Q 10. Soit (d, u) et (d', u') deux couples satisfaisant les conditions (DC). D'après ce qui précède, d et d' sont des polynômes en f donc ils commutent, donc grâce au théorème admis, $d - d'$ est diagonalisable. Or $d - d' = n' - n$ est la somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent eux aussi pour la même raison, donc d'après le cours, $n' - n$ est nilpotent, donc a pour unique valeur propre 0.

$d - d'$ est donc un endomorphisme diagonalisable qui possède une seule valeur propre 0, donc $d - d' = 0$, *i.e.* $d = d'$ et $n = n'$.

Ceci prouve l'unicité de la décomposition (DC).

Q 11. Calculons le polynôme caractéristique de A. Via les combinaisons $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ et $C_3 \leftarrow C_2 + C_3$:

$$P = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 0 \\ 2-X & -X & 1-X \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)(1-X) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

En faisant maintenant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, puis en développant selon la première colonne, on obtient :

$$P = (2-X)(1-X) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2-X & -X & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-X)(1-X)(-1)(2-X)(-1 \times 1 - 0 \times (-1) = (2-X)^2(1-X)$$

Ainsi, dans cet exemple, on a $r = 2$, avec $\lambda_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\alpha_2 = 2$.

En notant $(e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, on observe $A(e_2 + e_3) = e_2 + e_3$ i.e. $b_1 = e_2 + e_3$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre simple 1 (car 1 est racine simple de P) donc b_1 est une base de F_1. On a aussi $A(e_1 + e_2) = 2(e_1 + e_2)$ donc $b_2 = e_1 + e_2$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Cherchons b_3 tel que $(b_2; b_3)$ est une base de $F_2 = \ker(f - 2\mathrm{Id})^2$: nous avons

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on observe que b_2 et $b_3 = e_3$ sont bien dans le noyau de $(A - 2I)^2$ et que $(b_2; b_3)$ est une famille libre, donc via la question **Q 2**, la famille $(b_2; b_3)$ est une base de F_2 car via la question **Q 2**, on a $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{C}^3$ donc $\dim F_2 = 3 - \dim F_1 = 3 - 1 = 2$. Ainsi avec les notations précédentes, en prenant $\mathscr{B} = (b_1; b_2; b_3)$, comme $e_3 = b_3, e_2 = b_1 - b_3$ et $e_1 = b_2 - b_1 + b_3$, nous avons

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Ainsi : $D = P^{-1} D' P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Donc par construction (cf question précédente), nous avons

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = A - D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

III.

Q 12. Pour tout X de $M_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P)(X) &= P^{-1} \left(\mathrm{comm}_A(PXP^{-1})\right) P = P^{-1}(A(PXP^{-1}) - (PXP^{-1})A)P \\ &= P^{-1}APXP^{-1}P - P^{-1}PXP^{-1})AP = P^{-1}APX - XP^{-1})AP\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P = \mathrm{comm}_{P^{-1}AP} = \mathrm{comm}_{\mathrm{conj}_{P^{-1}}(A)}.}$

Q 13. Soit $a_1, \dots a_n$ les coefficients diagonaux de A, alors pour tout i et j dans $\{1, \dots, n\}$:

$\text{comm}_A(E_{i,j}) = AE_{i,j} - E_{i,j}A = a_i\,E_{i,j} - a_j E_{i,j} = (a_i - a_j)\,E_{i,j}$

Comme $E_{i,j}$ est non nul, on conclut que pour tout i et j de $\{1, \dots, n\}$,

$\boxed{\text{la matrice } E_{i,j} \text{ est vecteur propre de } \text{comm}_A \text{ associé à la valeur propre } a_i - a_j.}$

Comme $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension n^2, l'endomorphisme comm_A admet au plus n^2 vecteurs propres formant une famille libre ; ici, on a trouvé n^2 vecteurs propres libres, les $E_{i,j}$, on en déduit que

$\boxed{\text{le spectre de } \text{comm}_A \text{ est l'ensemble des } a_i - a_j \text{ avec } i,\, j \text{ décrivant } 1 \dots n.}$

Q 14. Si A est diagonalisable, il existe P dans $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A' = P^{-1}AP$ est diagonale. D'après la question Q 13, la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ formée par les $E_{i,j}$ est alors une base de vecteurs propres de $\text{comm}_{A'}$. Ainsi $\text{comm}_{A'}$ est diagonalisable car de matrice dans la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ diagonale. Or d'après la question **Q 12**, $\text{conj}_{P^{-1}} \circ \text{comm}_A \circ \text{conj}_P = \text{comm}_{P^{-1}AP}$, donc conj_P et $\text{conj}_{P^{-1}}$ étant inverses l'un de l'autre, on a $\text{comm}_{A'} = (\text{conj}_P)^{-1} \circ \text{comm}_A \circ \text{conj}_P$. On vient donc de prouver, en notant Q la matrice conj_P dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $M_n(\mathbb{R})$ la relation $Mat_{\mathscr{C}}(\text{comm}_{A'}) = Q^{-1}\,Mat_{\mathscr{C}}(\text{comm}_A)\,Q$. Ainsi $Mat_{\mathscr{C}}(\text{comm}_{A'})$ et $Mat_{\mathscr{C}}(\text{comm}_A)$ sont semblables et comme $Mat_{\mathscr{C}}(\text{comm}_{A'})$ est diagonale, $\boxed{\text{l'endomorphisme } \text{comm}_A \text{ est diagonalisable.}}$

Q 15. Soit A fixé dans $M_n(\mathbb{C})$, calculons pour tout X de $M_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}
(\text{comm}_A)^2(X) &= A(\text{comm}_A(X)) - (\text{comm}_A(X))A \\
&= A(AX - XA) - (AX - XA)A = A^2X - 2AXA + XA^2 \\
(\text{comm}_A)^3(X) &= A(A^2X - 2AXA + XA^2) - (A^2X - 2AXA + XA^2)A \\
&= A^3X - 2A^2XA + AXA^2) - A^2XA + 2AXA^2 - XA^3 \\
&= A^3X - 3A^2XA + 3AXA^2 - XA^3
\end{aligned}$$

Soit l'hypothèse de récurrence au rang k : $\forall X \in M_n(\mathbb{C}), (\text{comm}_A)^k(X) = \displaystyle\sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (-1)^s A^{k-s} X A^s$On vient de prouver cette relation pour $k = 2$ et $k = 3$, et elle est vraie par définition pour $k = 1$. Prouvons son caractère héréditaire en la supposant vraie à un rang k, alors pour tout $X \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
(\text{comm}_A)^{k+1}(X) &= A\left(\sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (-1)^s A^{k-s} X A^s\right) - \left(\sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (-1)^s A^{k-s} X A^s\right) A \\
&= \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (-1)^s A^{k+1-s} X A^s + \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (-1)^{s+1} A^{k-s} X A^{s+1} \\
&= \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (-1)^s A^{k+1-s} X A^s + \sum_{s=1}^{k+1} \binom{k}{s-1} (-1)^s A^{k+1-s} X A^s \\
&= A^{k+1}X + \sum_{s=1}^{k} \left(\binom{k}{s} + \binom{k}{s-1}\right) (-1)^s A^{k+1-s} X A^s + (-1)^{k+1} X A^{k+1} \\
&= A^{k+1}X + \sum_{s=1}^{k} \binom{k+1}{s} (-1)^s A^{k+1-s} X A^s + (-1)^{k+1} X A^{k+1} \quad \textit{via la formule du triangle de Pascal} \\
&= \sum_{s=0}^{k+1} \binom{k+1}{s} (-1)^s A^{k+1-s} X A^s
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est héréditaire, vraie au rang 1 donc par le principe de récurrence, on obtient

$$\boxed{\forall X \in M_n(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (\text{comm}_A)^k(X) = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (-1)^s A^{k-s} X A^s}$$

Ainsi si A est nilpotente, il existe un entier α avec $A^\alpha = 0$ donc $A^s = 0$ pour tout $s \geqslant \alpha$. Or pour tout entier s, soit $s \geqslant \alpha$ soit $s \leqslant \alpha$ et $2\alpha - s \geqslant \alpha$, donc via la formule précédente $(\text{comm}_A)^{2\alpha} = 0$ et donc $\boxed{\text{si } A \text{ est nilpotente alors } \text{comm}_A \text{ aussi.}}$

Q 16. Si $\text{comm}_A = 0$ alors pour tout i, on a $AE_{i,1} = E_{i,1}A$. En notant $a_{i,j}$ le coefficient en ligne i et colonne j de A, cette relation se traduit par (en regardant la première colonne) :

$\forall k=1,\dots,n,\ \ a_{k,i}=\delta_{i,k}a_{1,1}$ donc $a_{i,i}=a_{1,1}$ pour tout i et $a_{k,i}=0$ pour $i\neq k$. Ainsi A est une matrice diagonale donc du type aI_n. Si on suppose de plus A nilpotente, il existe un entier α avec $A^\alpha=0$ soit ici $a^\alpha I_n=0$ d'où $a=0$ et $\boxed{\text{A=0.}}$

Q 17. Soit D et N les matrices respectivement diagonalisable et nilpotente correspondant à la décomposition de Jordan de la matrice A. Alors via les questions **Q 14** et **Q 15**, les endomorphismes comm_D et comm_N de $M_n(\mathbb{C})$ sont respectivement diagonalisable et nilpotent. Par linéarité du produit matriciel par une matrixe fixée, $\mathrm{comm}_A=\mathrm{comm}_{D+N}=\mathrm{comm}_D+\mathrm{comm}_N$. Ainsi, si comm_D et comm_N commutent alors par unicité de la décomposition de Jordan, on aura :

$$\boxed{\text{la décomposition de Jordan de } \mathrm{comm}_A \text{ est obtenue avec les matrices } \mathrm{comm}_D \text{ et } \mathrm{comm}_N.}$$

Pour tout X de $M_n(\mathbb{C})$, calculons

$$\begin{aligned}&(\mathrm{comm}_D\circ\mathrm{comm}_N-\mathrm{comm}_N\circ\mathrm{comm}_D)(X)\\ &=D(NX-XN)-(NX-XN)D-(N(DX-XD)-(DX-XD)N)\\ &=DNX-DXN-NXD+XND-NDX+NXD+DXN-XDN\\ &=(DN-ND)X+X(ND-DN)=O_nX+XO_n=0\quad\text{ car } N \text{ et } D \text{ commutent}\end{aligned}$$

Ainsi comm_D et comm_N commutent, ce qui permet d'obtenir la décomposition voulue.

La question **Q 14** assure que si A est diagonalisable alors comm_A aussi. Réciproquement supposons que comm_A est diagonalisable, alors avec les notations précédentes, comm_D et comm_N correspondantent à la décomposition de Jordan de comm_A, mais comm_A et O_n aussi (ces endomorphismes commutent, le premier est diagonalisable et le second nilpotent) donc par unicité d'une telle décomposition, on obtient $\mathrm{comm}_D=\mathrm{comm}_A$ et $\mathrm{comm}_N=0$. Ainsi comme N est nilpotente, la question **Q 16** assure $N=0$ donc $A=D$ et A est diagonalisable.

$$\boxed{\text{Finalement, } A \text{ est diagonalisable si et seulement } \mathrm{comm}_A \text{ l'est.}}$$

IV.

Q 18. • u diagonalisable $\Longrightarrow \ker u=\ker(u^2)$

Supposons u diagonalisable. Il existe donc une base $\mathscr{B}=(e_1;\dots,e_p)$ de E formée de vecteurs propres de u. Pour tout i, notons λ_i la valeur propre de u associée au vecteur propre e_i. Alors tout vecteur x de E s'écrit $x=\displaystyle\sum_{i=1}^p x_ie_i$ à l'aide de ses coordonnées $(x_1;\dots,x_p)\in\mathbb{C}^p$ dans $\mathscr{B}$.

Par linéarité de u, $\ u(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^p x_i\,u(e_i)=\sum_{i=1}^p x_i\lambda_i\,e_i$, et $u^2(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^p x_i\,u^2(e_i)=\sum_{i=1}^p x_i\lambda_i^2\,e_i$,

Ainsi comme $\mathscr{B}$ est libre :

$[x\in\ker u\Leftrightarrow\forall i=1\dots p\quad\lambda_ix_i=0\,]$ et $\quad[x\in\ker u^2\Leftrightarrow\forall i=1\dots p\quad\lambda_i^2x_i=0\,]$,

or $\lambda_i=0$ si et seulement $\lambda_i^2=0$ donc via ce qui précède $x\in\ker u\Leftrightarrow x\in\ker u^2$ et donc $\boxed{\ker u=\ker(u^2)}$

• $\ker u=\ker(u^2)\Longrightarrow\ker u\cap\operatorname{Im}u=\{0\}$

Supposons que l'endomorphisme u vérifie $\ker u=\ker(u^2)$. Soit x dans $\ker u\cap\operatorname{Im}u$, alors comme x est dans $\operatorname{Im}u$, il existe y dans E avec $x=u(y)$ et comme x appartient à $\ker u$, on a aussi $u(x)=0$; donc en remplaçant $u^2(y)=u(u(y))=u(x)=0$ donc y appartient à $\ker(u^2)$ qui est $\ker u$ par hypothèse donc $u(y)=0$ i.e. $x=0$. Ainsi $\ker u\cap\operatorname{Im}u\subset\{0\}$ et comme intersection de deux sous-espaces vectoriels de E, on a bien $\boxed{\ker u\cap\operatorname{Im}u=\{0\}.}$

Q 19. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_q$ des scalaires complexes tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^q\lambda_i\ \varphi_i=0$ i.e. $\displaystyle\sum_{i=1}^q\lambda_i\ b(\varepsilon_i;x)=0$ pour tout x de E. Par linéarité à gauche de b, on a aussi $b\left(\displaystyle\sum_{i=1}^q\lambda_i\ \varepsilon_i;x\right)=0$ pour tout x de E i.e. $\displaystyle\sum_{i=1}^q\lambda_i\ \varepsilon_i$ appartient à $E^{\perp_b}$ donc est nul car b est supposée non dégénérée, donc comme $(\varepsilon_1;\cdots;\varepsilon_q)$ est une famille libre, tout les λ_i sont non nuls. Ainsi $\boxed{\text{la famille } (\varphi_i)_{i=1\dots q} \text{ est libre.}}$

Q 20. L'orthogonal $F^{\perp_b}$ de F relativement à b est l'ensemble des vecteurs x de E tels que la forme linéaire $b(x;\cdot)$ est nulle sur F. Or par linéarité $b(x;\cdot)$ est nulle sur le sous-espace vectoriel F si et seulement si cette forme est nulle sur une base de F. Ainsi : $x\in F^{\perp_b}\quad\Longleftrightarrow\quad\forall i=1\dots q,\ b(x;\varepsilon_i)=0$ i.e. $\varphi_i(x)=0$ par symétrie de b

Soit $(x_1;\dots x_p)$ les coordonnées d'un vecteur x dans la base $(e_1;\dots;x_p)$ de E, on a donc

$$x=\sum_{j=1}^{p} x_j\ e_j\ \in F^{\perp_b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i=1\dots q,\ \varphi_i(x)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i=1\dots q,\ x_i=0$$

car $(e_1;\dots;e_p)$ est la base antéduale de $(\varphi_1;\dots;\varphi_p)$. Ainsi,

$\boxed{\text{L'orthogonal } F^{\perp_b} \text{ est le sous-espace vectoriel engendré par } (e_{q+1};\dots;e_p).}$

Par hypothèse F est de dimension q et $F^{\perp_b}$ de dimension le cardinal d'une famille libre et génératrice (i.e. une base) de $F^{\perp_b}$, c'est le cas de $(e_{q+1};\dots;e_p)$. Donc $\boxed{\dim F+\dim F^{\perp_b}=q+(p-q)=p.}$

V.

Q 21. Comme l'application trace est une forme linéaire et la multiplication à droite ou à gauche par une matrice fixe est aussi linéaire, par composition φ est une forme bilinéaire. Elle est symétrique par définition de la trace :

$$\forall(X;Y)\in(M_n(\mathbb{C}))^2;\ \ \mathrm{tr}(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_{i,j}\ Y_{j,i}=\sum_{(i,j)\in\{1;\dots;n\}^2}X_{i,j}\ Y_{j,i}$$

Reste à montrer que φ est non dégénérée : soit donc C dans $E^{\perp_\varphi}$ alors

$$\varphi(C;\bar{C}^{\mathsf{T}})=0 \text{ i.e. } 0=\sum_{(i,j)\in\{1;\dots;n\}^2}A_{i,j}\ (\overline{C}^{\mathsf{T}})_{j,i}=\sum_{(i,j)\in\{1;\dots;n\}^2}C_{i,j}\ \overline{C_{i,j}}=\sum_{(i,j)\in\{1;\dots;n\}^2}|C_{i,j}|^2$$

Donc par somme de réels positifs, $|C_{i,j}|^2=0$ i.e. $C_{i,j}=0$ pour tout $(i;j)$ donc $C=0$.

Finalement $\boxed{\varphi \text{ est une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée.}}$

Q 22. Comme φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $M_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension n^2, la question **Q 20** donne la relation $\dim(\ker(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}=n^2-\dim(\ker(\mathrm{comm}_A))$. Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme comm_A de $M_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension n^2, assure donc $\dim(\ker(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}=\dim\mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A)$.

De plus, on a $\mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A)\subset(\ker(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}$. En effet : $\forall C\in\mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A)\quad \exists X\in M_n(\mathbb{C})$ tq $C=\mathrm{comm}_A(X)=AX-XA$

donc par linéarité de la trace,

$\forall Y\in\ker(\mathrm{comm}_A),\ \ \mathrm{tr}(CY)=\mathrm{tr}(AXY)-\mathrm{tr}(XAY)=\mathrm{tr}(AXY)-\mathrm{tr}(X(AY-YA))-\mathrm{tr}(XYA)$

Or $AY-YA=\mathrm{comm}_A(Y)=0$ et $\mathrm{tr}(AXY)=\mathrm{tr}((XY)A)$ par propriété de la trace.

Ainsi $\varphi(C;Y)=\mathrm{tr}(CY)=0$ donc C appartient bien à $(\ker(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}$.

Deux sous-espaces vectoriels de même dimension, dont l'un est inclus dans l'autre, étant confondus :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A)=(\ker(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}}$$

Q 23. Supposons A nilpotente. Soit Y dans $\ker(\mathrm{comm}_A)$, alors $AY=YA$ donc par récurrence, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $(AY)^k=A^kY^k$ et comme A est nilpotente, il existe une valeur de k avec $A^k=0$ donc $(AY)^k=0$ et X^k est un polynôme annulateur de AY. Toute valeur propre complexe de AY est donc racine de X^k donc est nulle et comme le polynôme caractéristique de AY est scindé (car élément non constant de $\mathbb{C}[X]$), la matrice AY est trigonalisable donc de trace la somme de ses valeurs propres. Ainsi on a $\mathrm{tr}(AY)=\varphi(A;Y)=0$ et A appartient à l'orthogonal de $\ker(\mathrm{comm}_A)$. La question **Q 22** assure donc

$$\boxed{\exists X\in M_n(\mathbb{C})\quad \text{tq}\quad \mathrm{comm}_A(A)=A}$$

Par bilinéarité du produit matriciel, on a $\mathrm{comm}_{A+\lambda I_n}=\mathrm{comm}_A+\lambda\mathrm{comm}_{I_n}=\mathrm{comm}_A$ donc

$$\boxed{\forall\lambda\in\mathbb{C},\mathrm{comm}_{A+\lambda I_n}(X)=\mathrm{comm}_A(X)=A}$$

Q 24. Reprenons les notations des questions **Q 4** et **Q 5**. Pour tout $i=$ de 1 à r, la question précédente assure qu'il existe X_i dans $M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{comm}_{N_i+\lambda_i I_{\alpha_i}}(X_i)=N_i$. Soit X la matrice diagonale par blocs dont les blocs sont les X_i, alors $\mathrm{comm}_A(PXP^{-1})=A(PXP^{-1})-(PXP^{-1})A=P\,(A'\,X-X\,A')\,P^{-1}$.

Calculons par blocs :

$$A'\,X = \begin{pmatrix} \lambda_1\,I_{\alpha_1}+N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r\,I_{\alpha_r}+N_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X_r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda_1\,I_{\alpha_1}+N_1)X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\lambda_r\,I_{\alpha_r}+N_r)X_r \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A'\,X - A'\,X = \begin{pmatrix} \mathrm{comm}_{\lambda_1\,I_{\alpha_1}+N_1}(X_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{comm}_{\lambda_r\,I_{\alpha_r}}(X_r) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_r \end{pmatrix} = N'$$

Et ainsi $\boxed{\mathrm{comm}_A(PXP^{-1}) = P\,(A'\,X - X\,A')\,P^{-1} = N}$

Q 25. Si A est diagonalisable alors comm_A aussi via la question **Q 14**, donc la question **Q 18** assure

$$\boxed{\ker(\mathrm{comm}_A) = \ker\left((\mathrm{comm}_A)^2\right).}$$

Réciproquement, supposons $\ker(\mathrm{comm}_A) = \ker\left((\mathrm{comm}_A)^2\right)$ et notons $(D;N)$ la décomposition de Dunford de A.

Par choix D et N commutent, donc $\mathrm{comm}_A(N) = AN - NA = (D+N)N - N(D+N) = O_n$, *i.e.* N appartient à $\ker(\mathrm{comm}_A)$.

Mais la question **Q 23** donne l'existence d'une matrice X avec $N = \mathrm{comm}_A(X)$, donc X vérifie $(\mathrm{comm}_A)^2(X) = \mathrm{comm}_A(N) = O_n$ ainsi X appartient à $\ker\left((\mathrm{comm}_A)^2\right)$ donc à $\ker(\mathrm{comm}_A)$ par hypothèse, ce qui se traduit par $\mathrm{comm}_A(X) = O_n$ i.e. $N = O_n$. Donc $A = D$ et on a bien $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$