Le sujet comporte trois pages et deux problèmes indépendants inspirés par le sujet CCINP MP - 2013. Il est rappelé que l'objectif n'est pas d'essayer de tout faire, mais plutôt de rédiger proprement une fraction raisonnable des réponses aux questions.

Il est demandé d'écrire lisiblement et de former des lettres et symboles qui soient clairement distinguables les uns des autres.

La rigueur des raisonnements ainsi que la lisibilité de la copie seront prises en compte dans l'appréciation.

tout passage sale ou écrit de manière illisible ne sera pas lu.

****

Problème 1 - Matrices toutes-puissantes

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

n désigne un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Un endomorphisme f de E est dit tout-puissant quand pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f = g^k$.

Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite toute-puissante quand pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = B^k$.

Pour abréger la rédaction, on écrit « f est $TP(\mathbb{K})$ » (resp. « A est $TP(\mathbb{K})$ ») pour signifier que f (resp. A) est toute-puissante dans $\mathscr{L}(E)$ (resp. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).

I. Généralités

Q 1. Montrer que si A est la matrice d'un endomorphisme f dans une certaine base de E, alors A est $TP(\mathbb{K})$ si et seulement si f est $TP(\mathbb{K})$.

Q 2. Montrer que tout projecteur de E est $TP(\mathbb{K})$.

Q 3. Montrer que si deux matrices sont semblables et si l'une est $TP(\mathbb{K})$, alors l'autre l'est aussi.

Q 4. Montrer que toute matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est $TP(\mathbb{C})$. En déduire que toute matrice diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est $TP(\mathbb{C})$.

Q 5. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et A est $TP(\mathbb{R})$, alors $\det A \geqslant 0$.

II. Des exemples et contre-exemples

II.A - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et dimension 2 Dans les trois questions suivantes, on suppose que $n = 2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Q 6.

a) Montrer que pour tout $(t, u) \in \mathbb{R}^2$, $R(t)R(u) = R(t+u)$.

b) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, que vaut $R(t)^k$?

c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $R(t)$ est $TP(\mathbb{R})$.

Q 7. Soit a, b deux réels. On pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Montrer que dans les cas suivants, A est $TP(\mathbb{R})$:

— a et b positifs ou nuls

— $a = b = -1$

— $a = b$ et a strictement négatif

Q 8. Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas $TP(\mathbb{R})$.

II.B - $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et dimension 3

Q 9. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On rappelle que j désigne le complexe $e^{2i\pi/3}$.

a) Calculer J^3 et montrer que J est $TP(\mathbb{C})$.
b) Sans calculer le polynôme caractéristique, donner les valeurs propres de J. Diagonaliser J.
c) Donner une matrice M telle que $M^2 = J$.

III. Matrices ou endomorphismes diagonalisables et $TP(\mathbb{R})$

Dans les questions **Q 10** à **Q 13**, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel soit $TP(\mathbb{R})$.

Q 10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ est $TP(\mathbb{R})$.

Montrer que si $\lambda < 0$, alors $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ est $TP(\mathbb{R})$ si et seulement si n est pair. *On pourra utiliser le résultat de la question **Q 7** et travailler par blocs.*

Soit donc f un endomorphisme diagonalisable de E.

Q 11. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f = g^k$.

Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

Q 12. Montrer que si f est $TP(\mathbb{R})$, alors les endomorphismes induits par f dans chacun de ses sous-espace propres sont $TP(\mathbb{R})$.

Q 13. Montrer l'équivalence :

f est $TP(\mathbb{R})$ si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \cap \mathbb{R}_-^*$, $\dim \mathrm{sep}(f, \lambda)$ est paire.

Q 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est diagonalisable et donner une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
b) Montrer que A est $TP(\mathbb{R})$.
c) Donner deux exemples de matrices B telles que $A = B^2$ et $A = B^3$: il suffira de donner B sous forme de produit de 3 matrices dont seule celle du milieu est explicitée.

IV. Matrices nilpotentes

Dans cette partie, N est une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Q 15.

a) Soit $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg R < n$ et $R \neq 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \left| \dfrac{R(x)}{x^n} \right| = +\infty$.
b) Soit $V \in \mathbb{K}[X]$ tel que $V(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$. Montrer que X^n divise V.

Q 16. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme $U \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + x \underset{x \to 0}{=} U(x)^k + o(x^n)$. *On pourra utiliser un dév. limité de* $(1+x)^\alpha$ *en* 0.

En déduire l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X = U^k + X^n Q$.

Q 17.

a) Montrer que $I_n + N$ est $TP(\mathbb{C})$.
b) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda I_n + N$ est $TP(\mathbb{C})$.

Q 18. Montrer que si $N \neq 0$, alors N n'est pas $TP(\mathbb{C})$.

V. Les automorphismes sont $TP(\mathbb{C})$

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et f désigne un automorphisme de E, *i.e.* un élément de $GL(E)$.

Son polynôme caractéristique s'écrit $\prod\limits_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les r valeurs propres distinctes de f et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont leurs ordres de multiplicité.

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $E_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

Q 19. Montrer que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_i$.

Q 20. Montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, E_i est un sous-espace vectoriel stable par f. On note f_i l'endomorphisme de E_i induit par f.

Q 21. Justifier que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, f_i est de la forme $\lambda_i\,\mathrm{Id}_{E_i} + u_i$ où u_i est un endomorphisme nilpotent de E_i.

Q 22. Conclure : montrer que tout automorphisme de E est $TP(\mathbb{C})$.

Devoir surveillé 4 - sujet CCP - E3A - Corrigé

Problème 1

I.

Q 1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, A sa matrice dans une base $\mathscr{B}$.

Si f est $TP(\mathbb{K})$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f = g^k$. On pose alors B la matrice de g dans cette base et on a $A = B^k$. donc A est $TP(\mathbb{K})$

Réciproquement, si A est $TP(\mathbb{K})$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = B^k$. On pose alors $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que B soit sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ et on a $f = g^k$. Donc f est $TP(\mathbb{K})$.

Q 2. Si p est un projecteur, alors $p = p^2$ donc par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p = p^k$. Donc p est $TP(\mathbb{K})$.

Q 3. Soit A, B deux matrices semblables. Alors elles représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes. Donc d'après la question **Q 1**,

$$A \text{ est } TP(\mathbb{K}) \iff f \text{ est } TP(\mathbb{K}) \iff B \text{ est } TP(\mathbb{K})$$

Q 4. Soit D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $d_1, \dots, d_n$ ses coefficients diagonaux et $k \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathbb{C}$, tout complexe possède des racines k-èmes, donc on peut poser $e_1, \dots, e_n$ des racines k-èmes de $d_1, \dots, d_n$ respectivement et E la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $e_2, \dots, e_n$: elle vérifie alors $D = E^k$. Donc D est $TP(\mathbb{C})$.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable : elle est semblable à une matrice diagonale, qui est $TP(\mathbb{C})$ d'après ce qui précède, donc d'après la question **Q 3**, M est aussi $TP(\mathbb{C})$.

Q 5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice $TP(\mathbb{R})$, alors en particulier, il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$, donc $\det A = \det(B^2) = (\det B)^2 \geqslant 0$, car $\det B$ est un réel.

II.

II.A -

Q 6.

a) Simple calcul et utilisation des formules classiques de trigonométrie.

b) Par récurrence immédiate, pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $R(t)^k = R(kt)$.

c) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $u = \dfrac{t}{k}$. Alors $R(t) = R(ku) = R(u)^k$. Donc $R(t)$ est $TP(\mathbb{R})$.

Q 7.

— Si a et b positifs ou nuls et $k \in \mathbb{N}^*$, alors on pose $B = \begin{pmatrix} \sqrt[k]{a} & 0 \\ 0 & \sqrt[k]{b} \end{pmatrix}$ et on a $A = B^k$, donc dans ce cas, A est $TP(\mathbb{R})$.

— Si $a = b = -1$, alors $A = R(\pi)$ donc d'après la question précédente, A est $TP(\mathbb{R})$.

— Si $a = b$ et a strictement négatif et $k \in \mathbb{N}^*$, alors on pose $c = |a| \geqslant 0$, puis $B = \sqrt[k]{c}R\left(\dfrac{\pi}{k}\right)$, de sorte que $B^k = cR(\pi) = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Donc A est $TP(\mathbb{R})$.

Q 8. Son déterminant est strictement négatif donc d'après la question **Q 5**, elle n'est pas $TP(\mathbb{R})$.

II.B -

Q 9.

a) Après calculs très simples, $J^3 = I_3$ donc le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de J. Or il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ (ses racines sont $1, j, j^2$) donc J est diagonalisable. donc elle est $TP(\mathbb{C})$ d'après **Q 4**.

b) J est diagonalisable donc la somme de ses valeurs propres est égale à 0, sa trace. Et on sait que les valeurs propres de J sont parmi $1, j, j^2$, les racines du polynôme annulateur. Or la seule facon d'obtenir 0 en faisant la somme de trois nombres pris parmi $1, j, j^2$ est de les prendre tous : $1 + j + j^2 = 0$, alors que $1 + 1 + j \neq 0$, $1 + j + j \neq 0$, etc. Donc $\mathrm{Sp}(J) = \{1, j, j^2\}$.

Après calculs non détaillés, on constate que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre 1, $\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre j et $\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$ est vecteur propre pour la valeur propre j^2.

Donc en notant $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}$, on a $D=P^{-1}AP$.

c) $J^3=I_3$ donc $J^4=J$ donc $J=(J^2)^2$: $M=J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ convient.

III.

Q 10. Si $\lambda\geqslant 0$ et $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mu=\sqrt[k]{\lambda}$ et alors $\lambda\,\mathrm{Id}_E=(\mu\,\mathrm{Id}_E)^k$. Donc $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ est $TP(\mathbb{R})$.

Si $\lambda<0$, alors

— si $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ est $TP(R)$, alors d'après **Q 5**, $\det(\lambda\,\mathrm{Id}_E)=\lambda^n\geqslant 0$. Or $\lambda<0$, donc n est pair ;

— réciproquement, si n est pair, alors dans une base quelconque de E, la matrice de $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ est λI_n, qu'on écrit diagonale par blocs, où chaque bloc est une matrice $A=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$: $\lambda I_n=\begin{pmatrix}A&0&\dots&0\\0&A&0&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&A\end{pmatrix}$;

Soit $k\in\mathbb{N}^*$; d'après **Q 7**, il existe $B\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A=B^k$, donc en posant $M=\begin{pmatrix}B&0&\dots&0\\0&B&0&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&B\end{pmatrix}$, on a $M^k=\lambda I_n$; donc $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ est $TP(\mathbb{R})$.

Q 11. f et g commutent donc pour toute valeur propre λ de f, pour tout $x\in\mathrm{sep}(f,\lambda)$, $f(x)=\lambda x$ donc $g(f(x))=f(g(x))=\lambda g(x)$ donc $g(x)\in\mathrm{sep}(f,\lambda)$.

Q 12. Si f est $TP(\mathbb{R})$, alors pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, il existe $g\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f=g^k$. D'après la question précédente, les sous-espaces propres de f sont stables par g (et par f aussi !), donc on peut définir dans chaque sous-espace propre de f les endomorphismes induits par g et par f, que je note $\bar{g}$ et $\bar{f}$: comme $f=g^k$, alors $\bar{f}=(\bar{g})^k$, donc $\bar{f}$ est aussi $TP(\mathbb{R})$.

Q 13. Si f est $TP(\mathbb{R})$, alors soit λ une valeur propre strictement négative de f : l'endomorphisme induit par f dans $F=\mathrm{sep}(f,\lambda)$ est $\lambda\,\mathrm{Id}_F$, qui est $TP(\mathbb{R})$ d'après la question **Q 12**, donc d'après la question **Q 10**, $\dim F$ est paire.

Réciproquement, si pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}(f)\cap\mathbb{R}_-^*$, $\dim\mathrm{sep}(f,\lambda)$ est paire, alors l'endomorphisme induit par f dans $\mathrm{sep}(f,\lambda)$ est $TP(\mathbb{R})$ d'après **Q 10** et dans tout autre sous-espace propre associé à une valeur propre positive λ, il l'est aussi en reprenant la même idée qu'en **Q 7**, puisque dans ce cas, $\lambda\,\mathrm{Id}_F=(\sqrt[k]{\lambda}\,\mathrm{Id}_F)^k$.

Donc en travaillant par blocs, on constate que f est $TP(\mathbb{R})$.

Q 14.

a) Après calculs non détaillés, $\chi_A=X(X+4)^2$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{0,-4\}$; $\dim\mathrm{sep}(A,-4)=3-\mathrm{rg}(A+4I_3)=2$; comme 0 est valeur propre simple, $\dim\mathrm{sep}(A,0)=1$, donc la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 3, donc A est diagonalisable.

Si on pose $P=\begin{pmatrix}1&3&0\\-1&4&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$, on a $A=PDP^{-1}$.

b) A est diagonalisable et la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre strictement négative -4 est paire, donc d'après **Q 13**, A est $TP(\mathbb{R})$.

c) Par exemple, avec $B=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-2\\0&2&-0\end{pmatrix}P^{-1}$, on a $A=B^2$. On reconnaît le bloc $2R(\pi/2)$.

Et avec $B=\sqrt[3]{4}\,P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1/2&-\sqrt{3}/2\\0&\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix}P^{-1}$, on a $A=B^3$. On reconnaît le bloc $\sqrt[3]{4}\,R(\pi/3)$.

IV.

Q 15.

a) R s'écrit $\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ et $R \neq 0$: parmi les coefficients non nuls de R, on considère celui de plus petit degré k ($k \leqslant n-1$).

Alors $R(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_k x^k$, donc $\left|\dfrac{R(x)}{x^n}\right| \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{|a_k|}{|x^{n-k}|} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ car $n-k>0$.

b) Soit $V \in \mathbb{K}[X]$ tel que $V(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$. On effectue la division euclidienne de V par X^n : $V = X^n Q + R$ où Q et R sont deux polynômes et $\deg R < \deg X^n$.

Alors $\dfrac{V(x)}{x^n} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{x^n}$: Q est un polynôme donc $\lim\limits_{x\to 0} Q(x) = Q(0)$ est un réel et si $R \neq 0$, alors d'après la question précédente, $\dfrac{R(x)}{x^n}$ a une limite infinie quand x tend vers 0, donc dans ce cas, la limite de $\dfrac{V(x)}{x^n}$ est infinie, ce qui contredit l'hypothèse. Donc R est nul et donc X^n divise V.

Q 16. On considère le dév. limité de $(1+x)^{1/k}$ en 0 à l'ordre n : il s'écrit $(1+x)^{1/k} = U_(x) + x^n \varepsilon(x)$, où U est un polynôme de degré $\leqslant n$ et ε une fonction ayant pour limite 0 en 0.

Par le binôme de Newton, on a alors $1 + x = (U(x) + o(x^n))^k = U(x)^k + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} U(x)^{k-j} x^{nj} \varepsilon(x)^j = U(x)^k + x^n \varepsilon(x)\varphi(x)$ où $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} U(x)^{k-j} x^{n(j-1)} \varepsilon(x)^{j-1}$ a une limite finie quand x tend vers 0.

Donc $1 + x = U(x)^k + o(x^n)$ quand x tend vers 0.

D'après la question **Q 15**, le polynôme $1 + X - U(X)^k$ est divisible par X^n, d'où l'existence de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X = U(X)^k + X^n Q(X)$.

Q 17.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $N^n = 0$ (c'est du cours).

Or d'après la question **Q 16**, il existe U, Q deux polynômes tels que $1 + X = U^k + X^n Q$, donc en évaluant en N, on a $I_n + N = U(N)^k + N^n Q(N) = U(N)^k$.

Donc $I_n + N$ est $TP(\mathbb{C})$.

b) Soit $\lambda \neq 0$. Alors $M = \lambda I_n + N$ s'écrit $\lambda(I_n + N')$ où N' est nilpotente.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On choisit μ une racine k-ème de λ et d'après **Q 16**, on peut trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^k = I_n + N'$. Donc $M = (\mu A)^k$.

Donc M est $TP(\mathbb{C})$.

Q 18. Par contraposée, on suppose que N est nilpotente et N est $TP(\mathbb{C})$.

Alors il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N = A^n$. Donc $N^n = A^{n^2} = 0$, donc A est elle-même nilpotente, donc $A^n = 0$, donc $N = 0$.

V.

Q 19. f est un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé, donc on sait d'après le cours que E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques, qui sont justement les E_i.

Q 20. C'est du cours : on refait la preuve du cours ici, car c'est l'essence de la question. Voyez donc votre cours.

Q 21. Encore du cours : on sait que f_i vérifie $(f_i - \lambda_i \operatorname{Id}_{E_i})^{\alpha_i} = 0$, donc en posant $u_i = f_i - \lambda_i \operatorname{Id}_{E_i}$, on a u_i nilpotent et $f_j = \lambda_i \operatorname{Id}_{E_i} + u_i$.

Q 22. Soit f un automorphisme de E. Dans une certaine base, sa matrice est diagonale par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + U_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{\alpha_2} + U_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + U_r \end{pmatrix}$$

où $U_1, \dots, U_r$ sont des matrices nilpotentes et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres **non nulles** de f.

D'après **Q 17**, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, chaque bloc $\lambda_j I_{\alpha_j} + U_j$ peut s'écrire A_j^k, donc M est la puissance k-ème de la matrice diagonale par blocs $\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_r)$.

Donc f est $TP(\mathbb{C})$.