

## 1 Réduction des endomorphismes

- a) Valeur propre, vecteur propre d'un endomorphisme. Lien entre les valeurs propres et les racines d'un polynôme annulateur. Sous-espaces propres. Les sous-espaces propres sont en somme directe.

Dans toute la suite, les espaces sont de dimension finie.

- b) Polynôme caractéristique, lien entre ses racines et les valeurs propres. Ordre de multiplicité d'une valeur propre, lien avec la dimension du sous-espace propre associé. Endomorphisme scindé, lien entre les valeurs propres et la trace ou le déterminant de l'endomorphisme.
- c) Transposition du vocabulaire précédent aux matrices et résultats associés.
- d) Diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice : définition (existence d'une base de vecteurs propres). Caractérisations équivalentes :
- existence d'une matrice diagonale dans une base / d'une matrice diagonale semblable ;
  - les sous-espaces propres sont supplémentaires, ce qui se lit sur la somme des dimensions des sous-espaces-propres ;
  - l'endomorphisme est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée
  - existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples
  - le polynôme minimal est scindé à racines simples.

Cas particuliers des endomorphismes / matrices ayant  $n$  valeurs propres distinctes.

Lemme des noyaux. L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est lui-même diagonalisable.

- e) Application de la diagonalisabilité : calcul des puissances, suites récurrentes linéaires, sous-espaces stables.
- f) Trigonalisation : tout endomorphisme scindé est trigonalisable. Théorème de Cayley-Hamilton. Pratique en dimensions 2 et 3 de la trigonalisation : aucune technicité n'est attendue.
- g) Sous-espaces caractéristiques. Si un endomorphisme est scindé, il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieure à diagonale constante.
- h) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes. L'indice de nilpotence est toujours inférieur ou égal à la dimension de l'espace. Caractérisation des nilpotents par leur polynôme caractéristique, par leur unique valeur propre dans le cas scindé.