

Problème 1 - D'après Centrale MP 1 - 2009

Notations

On note E l'espace vectoriel normé des applications continues du segment $[0, 1]$ dans \mathbb{C} muni de la norme $f \mapsto \|f\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$, et $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans lui-même.

Soit v un élément de $\mathcal{L}(E)$, et f un élément de E , l'image de f par v est notée vf . L'espace $\mathcal{L}(E)$ est muni de la norme $v \mapsto \|v\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|vf\|$.

La deuxième fonction eulérienne notée Γ est la fonction réelle définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par la formule suivante :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur appliquant E dans lui-même qui est introduit dans la troisième partie. Pour ce faire, on met en place dans les deux premières parties des outils nécessaires à cette étude.

I. Questions préliminaires

Q 1. Montrer que Γ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

On admettra que

— cette fonction est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt$$

— pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et comme $\Gamma(1) = 1$, il en découle que pour tout entier naturel n , $\Gamma(n+1) = n!$.

Q 2. Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

Q 3. En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

Q 4. Montrer que, pour tout nombre réel $\gamma > 0$,

$$\gamma^x = o(\Gamma(x)) \quad \text{au voisinage de } +\infty$$

II. Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A - Soit ϕ une application continue et positive de l'intervalle $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} , intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel $t_0 \geq 0$ tel que la fonction ϕ soit décroissante sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.

Q 5. Soit h un réel strictement positif.

a) Prouver que pour n suffisamment grand, $0 \leq h\phi(nh) \leq \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t) dt$.

b) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)$ converge.

Q 6. Soit $a > t_0$ et $h > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall h \in]0, \alpha[\quad \int_{h[\frac{a}{h}] + h}^{+\infty} \phi(t) dt \leq \sum_{n=[\frac{a}{h}] + 1}^{+\infty} h\phi(nh) \leq \int_{h[\frac{a}{h}]}^{+\infty} \phi(t) dt$$

En déduire que : $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \sum_{n=[\frac{a}{h}] + 1}^{+\infty} h\phi(nh) = \int_a^{+\infty} \phi(t) dt$.

Q 7. Prouver que :

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} h \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t) dt$$

II.B - Pour tout nombre réel $\alpha \geq 1$, on note g_α la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par la formule $g_\alpha(t) = e^{-t}t^{\alpha-1}$.

Q 8. Vérifier que la fonction g_α satisfait aux conditions du II.A.

En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) = \Gamma(\alpha)$$

Q 9. On considère la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1} x^n$ où x est un réel.

- Préciser les valeurs de x pour lesquelles cette série converge. On note $S_\alpha(x)$ la somme de cette série.
- Prouver que, lorsque x tend vers 1 avec $x < 1$, alors :

$$S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$$

III. La première fonction eulérienne

III.A -

Q 10. Établir que, pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$.

Pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs, on pose : $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$.

Q 11. Prouver successivement pour tout couple (α, β) de nombres réels strictement positifs les relations suivantes :

- $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$
- $B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$.)
- $B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta)$

III.B - On se propose d'établir pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $\beta > 0$ la formule suivante :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Q 12. À l'aide de la relation (iii) montrer qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque les réels α et β sont strictement supérieurs à 2.

Q 13. Soient α et β deux nombres réels strictement supérieurs à 2. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$u_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$$

a) Établir que la fonction $\psi_{\alpha, \beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est lipschitzienne sur le segment $[0, 1]$.

On note $A_{\alpha, \beta}$ un réel tel que $\forall (x, y) \in [0, 1]^2 \quad |\psi_{\alpha, \beta}(x) - \psi_{\alpha, \beta}(y)| \leq A_{\alpha, \beta} |x - y|$

b) Prouver que, pour tout entier n strictement positif :

$$|u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)| \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2n}$$

c) On reprend les notations de la question **Q 8**.

Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0, 1[$:

$$S_\alpha(x)S_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha, \beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n$$

Déduire de la question **Q 12 b** que, pour tout réel x , $0 \leq x < 1$,

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x)$$

En utilisant le comportement des fonctions $(S_\gamma)_{\gamma \geq 1}$ au voisinage du point 1, conclure que :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha + \beta)$$

III.C - Formule des compléments.

Q 14. Établir que la fonction $\alpha \mapsto B(\alpha, 1 - \alpha)$ est continue sur l'intervalle $]0, 1[$.

Q 15. Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.

a) Vérifier que :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = 2q \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt$$

b) Pour tout entier k compris entre 0 et $q-1$, on note $z_k = e^{i\frac{2k+1}{2q}\pi}$. Établir que :

$$(*) \quad \frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left(\frac{1}{X-z_k} - \frac{1}{X+z_k} \right)$$

c) Après avoir vérifié que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{2} \ln((t-a)^2 + b^2) + i \arctan\left(\frac{t-a}{b}\right)$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-(a+ib)}$, prouver, en utilisant judicieusement la relation (*), que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt = -i \frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$$

En conclure que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt = \frac{\pi}{2q} \frac{1}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}$$

Q 16. Montrer l'égalité suivante, appelée formule des compléments :

$$\forall \alpha \in]0, 1[\quad B(\alpha, 1 - \alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

IV. L'opérateur d'Abel

Dans toute cette dernière partie, on suppose que α est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

IV.A -

Q 17. Établir que pour toute fonction f de E et pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1[$, la fonction $f \mapsto \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, x[$.

Q 18. Pour tout élément f de E , on note $A_\alpha f$ la fonction définie sur le segment $[0, 1]$ par les formules suivantes :

$$A_\alpha f(x) = 0 \quad \text{si } x = 0$$

$$A_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad \text{si } 0 < x \leq 1$$

a) Vérifier que, pour tout f élément de E et tout réel x du segment $[0, 1]$,

$$A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt$$

b) Montrer que, pour tout élément f de E , la fonction $A_\alpha f$ est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$.

c) Établir que l'application $A_\alpha : f \mapsto A_\alpha f$ est un endomorphisme continu de l'espace vectoriel normé E et que :

$$\|A_\alpha\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha}$$

IV.B - On définit la suite $(A_\alpha^n)_{n \geq 0}$ par la condition initiale $A_\alpha^0 = id_E$ (application identique de E) et, pour tout $n \geq 0$, par la relation de récurrence suivante :

$$A_\alpha^{n+1} = A_\alpha \circ A_\alpha^n$$

Q 19. On pose $\beta = 1 - \alpha$.

a) Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout f élément de E et pour tout x du segment $[0, 1]$, établir l'inégalité suivante :

$$|A_\alpha^n f(x)| \leq \frac{x^{n\beta} (\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$$

b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, A_α^n est un endomorphisme continu de E et que :

$$\|A_\alpha^n\| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}$$

Q 20. Pour tout nombre réel positif γ , montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0$$

On pourra utiliser le résultat de la question préliminaire **Q 3**.

Q 21. Soient λ un nombre complexe non nul et f un élément de E .

a) Prouver que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f$ converge simplement sur le segment $[0, 1]$. On note g la somme de cette série de fonctions. Pour les 3/2 : on admettra que $g \in E$. Pour les 5/2 : montrer que $g \in E$.

b) Prouver que

$$(id_E - \lambda A_\alpha)g = f$$

c) En déduire que, pour tout nombre complexe λ non nul, l'opérateur $id_E - \lambda A_\alpha$ est inversible et que :

$$(id_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$$

où $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$ désigne l'application $f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n(f)$.

IV.C - Pour tout entier naturel n , on note e_n la fonction monômiale $t \mapsto t^n$.

Q 22. Soit n un entier naturel.

a) Calculer $A_\alpha e_n$.

b) En déduire que :

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha) e_n = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1}$$

Q 23. Ce résultat suggère d'introduire l'opérateur P défini sur E par la formule suivante :

$$\forall x \in [0, 1] \quad , \quad Pf(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Ainsi, avec cette notation, pour tout entier naturel n ,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha) e_n = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} P e_n$$

Établir que, pour toute fonction polynômiale ψ ,

$$(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)\psi = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P\psi$$

Q 24. Formule d'inversion d'Abel.

a) Montrer que l'endomorphisme P est un endomorphisme continu de E tel que :

$$\|P\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Pf\| = 1$$

b) On pose $B_\alpha = A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$. Montrer que :

$$B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P$$

c) Soit D l'opérateur qui à toute application continûment dérivable de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} associe sa dérivée.

Montrer que $D \circ B_\alpha$ est bien défini et que :

$$D \circ B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} id_E$$

d) En déduire que l'opérateur A_α est injectif.

Je remercie mon ami Philippe Patte pour son corrigé dont je me suis largement inspiré.

Problème 1

I.

Q 1. Soit $x > 0$. On pose $g : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$.

Il est clair que g est continue sur $]0, +\infty[$.

— Par comparaison asymptotique classique, $0 \leq g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} g$ converge.

— $0 \leq g(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ et $1 - x < 1$ donc l'intégrale $\int_0^1 g$ converge.

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} g$ converge (et même g intégrable puisqu'elle est positive).

De plus,

— pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$

— soit $0 < a < b$ deux réels :

— pour tout $t \in]0, 1]$ et $x \in [a, b]$, $|e^{-t}t^{x-1}| \leq e^{-t}t^{a-1}$ (car $\ln t \leq 0$)

— pour tout $t \in]1, +\infty[$ et $x \in [a, b]$, $|e^{-t}t^{x-1}| \leq e^{-t}t^{b-1}$ (car $\ln t \geq 0$)

On pose $\varphi : t \mapsto \begin{cases} e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1] \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$

φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (même preuve que pour l'intégrabilité de g) et on a donc une hypothèse de domination sur $[a, b]$.

D'après le th. de continuité sous le signe \int , Γ est continue sur $[a, b]$.

Comme ceci est vrai sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$, on en déduit par réunion d'intervalles que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

Q 2. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Comme Γ est continue sur $[1, 2]$ et dérivable sur $]1, 2[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

Q 3. Pour $x > 0$, $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t}t^{x-1} dt$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle, donc $\Gamma''(x) > 0$. Donc Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que Γ' est strictement positive sur $]c, +\infty[$ et Γ strictement croissante sur cet intervalle; *a fortiori* sur $[2, +\infty[$.

Q 4. Comme $(\Gamma(n))_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$ et que Γ est croissante au voisinage de $+\infty$, Γ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On peut donc limiter l'étude à $\gamma > 1$.

Pour $x \geq 2$, on note n sa partie entière.

On a alors : $0 \leq \frac{\gamma^x}{\Gamma(x)} \leq \frac{\gamma^{n+1}}{\Gamma(n)} = \gamma^2 \frac{\gamma^{n-1}}{(n-1)!}$. Comme la partie entière tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et que la suite $\left(\frac{\gamma^{n-1}}{(n-1)!}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0, $\frac{\gamma^x}{\Gamma(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, i.e. $\gamma^x = o(\Gamma(x))$ au voisinage de $+\infty$.

II.

II.A -

Q 5.

a) Pour $n \geq (t_0/h) + 1 : \forall t \in [(n-1)h, nh] \subset [t_0, +\infty[$, $\phi(t) \geq \phi(nh)$.

Donc $\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t) dt \geq \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(nh) dt = h\phi(nh) \geq 0$.

b) Comme ϕ est intégrable sur $[0, +\infty[$, la série $\sum \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t) dt$ converge; on déduit de (II.A.2.a) la convergence de la série $\sum h\phi(nh)$ par th. de comparaisons de séries à termes positifs (TCSTP).

Q 6. Pour $n \geq (t_0/h) + 1$, pour la même raison qu'au (II.A.2.a) :

$$\text{pour tout } k \geq n, \int_{kh}^{(k+1)h} \phi(t) dt \leq h\phi(kh) \leq \int_{(k-1)h}^{kh} \phi(t) dt, \text{ donc } \int_{nh}^{+\infty} \phi(t) dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} h\phi(kh) \leq \int_{(n-1)h}^{+\infty} \phi(t) dt.$$

On veut pouvoir spécialiser n en $\lfloor \frac{a}{h} \rfloor + 1$, il faut et il suffit donc que $h \lfloor \frac{a}{h} \rfloor \geq t_0$. Or par définition de la partie entière, $\lfloor \frac{a}{h} \rfloor \leq \frac{a}{h} < \lfloor \frac{a}{h} \rfloor + 1$ donc par encadrement, $\lim_{h \rightarrow 0} h \lfloor \frac{a}{h} \rfloor = a > t_0$.

donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h \in]0, \alpha]$, $h \lfloor \frac{a}{h} \rfloor > t_0$, d'où l'inégalité demandée.

De plus, par continuité de la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \phi$, on en déduit encore par encadrement que :

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \sum_{n=\lfloor \frac{a}{h} \rfloor + 1}^{+\infty} h\phi(nh) = \int_a^{+\infty} \phi(t) dt$$

Q 7. Soit $\varepsilon > 0$. On fixe d'abord a tel que $a > t_0$ ($a = t_0 + 1$ si on veut) pour utiliser le résultat précédent :

$$\text{il existe } \beta > 0 \text{ tel que pour tout } h \in]0, \beta], \left| \sum_{n=\lfloor \frac{a}{h} \rfloor + 1}^{+\infty} h\phi(nh) - \int_a^{+\infty} \phi(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Puis on étudie $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{a}{h} \rfloor} h\phi(nh)$, qui est presque une somme de Riemann, donc on va s'inspirer de la démonstration de ce résultat pour prouver

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{a}{h} \rfloor} h\phi(nh) = \int_0^a \phi$$

Comme ϕ est continue sur le segment $[0, a + 1]$, elle y est uniformément continue (th. de Heine) :

il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0, a + 1]^2$, si $|x - y| \leq \alpha$ alors $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{a + 1}$.

Soit $h \in]0, \alpha[$ et $h < 1$. Pour un tel h , on pose ensuite $N = \lfloor \frac{a}{h} \rfloor + 1$, de sorte que $0 < h < 2h < \dots < (N - 1)h \leq a < Nh \leq a + 1$.

Alors pour tout $k \in [0, N - 1]$, pour tout $t \in [kh, (k + 1)h]$, $|t - kh| \leq h < \alpha$ donc $|\phi(t) - \phi(kh)| \leq \frac{\varepsilon}{a + 1}$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{kh}^{(k+1)h} \phi(t) dt - h\phi(kh) \right) \right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{kh}^{(k+1)h} \phi(t) dt - h\phi(kh) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{kh}^{(k+1)h} (\phi(t) - \phi(kh)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kh}^{(k+1)h} |\phi(t) - \phi(kh)| dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} h \frac{\varepsilon}{a + 1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left| \int_0^{Nh} \phi(t) dt - h \sum_{k=0}^{N-1} \phi(kh) \right| \leq Nh \frac{\varepsilon}{a + 1} \leq (a + 1) \frac{\varepsilon}{a + 1} = \varepsilon$$

Or la fonction $x \mapsto \int_0^x \phi$ est continue et $\lim_{h \rightarrow 0} Nh = a$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{Nh} \phi = \int_0^a \phi$.

Donc il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $h \in]0, \gamma]$, $\left| \int_0^a \phi - \int_0^{Nh} \phi \right| \leq \varepsilon$.

Finalement, pour tout $h \in]0, \min(\alpha, \beta, \gamma, 1)]$, on a par inégalité triangulaire :

$$\left| \int_0^{+\infty} \phi(t) dt - h \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) \right| \leq \left| \int_0^{Nh} \phi(t) dt - h \sum_{n=0}^{(N-1)h} \phi(nh) \right| + \left| \int_0^a \phi - \int_0^{Nh} \phi \right| + \left| \int_a^{+\infty} \phi(t) dt - h \sum_{n=(N+1)h}^{+\infty} \phi(nh) \right|$$

donc

$$\left| \int_0^{+\infty} \phi(t) dt - h \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(nh) \right| \leq 3\varepsilon$$

II.B -

Q 8. Pour $\alpha < 1$, la fonction g_α ne peut être prolongée en une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

Pour la suite, on suppose $\alpha \geq 1$. Alors g_α est continue sur $[0, +\infty[$ (après prolongement naturel en 0) et intégrable sur $[0, +\infty[$ (d'intégrale $\Gamma(\alpha)$). Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'_\alpha(t) = e^{-t}t^{\alpha-2}(-t + \alpha - 1)$. Donc g'_α est négative sur $[\alpha - 1, +\infty[$ et g_α est décroissante sur cet intervalle. Les hypothèses du (II.A) sont donc satisfaites par g_α , $\alpha \geq 1$.

Pour $x \in]0, 1[$, $h = -\ln x > 0$ et $h \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(nh) = (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x)$; comme $h \xrightarrow{x \rightarrow 1, x < 1} 0$ avec $h > 0$, d'après

$$(II.A), (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) \xrightarrow{x \rightarrow 1, x < 1} \int_0^{+\infty} g_\alpha = \Gamma(\alpha).$$

Q 9.

a) On étudie la convergence absolue de la série $\sum n^{\alpha-1}x^n$ pour $x \neq 0$:

$\frac{|(n+1)^{\alpha-1}x^{n+1}|}{|n^{\alpha-1}x^n|} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$; d'après la règle de d'Alembert, comme $|n^{\alpha-1}x^n| > 0$ pour tout $n \geq 1$, si $|x| < 1$, la série $\sum |n^{\alpha-1}x^n|$ converge, si $|x| > 1$, elle diverge.

Et pour $x = 1$ ou $x = -1$, $|n^{\alpha-1}x^n| = n^{\alpha-1}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc la série diverge grossièrement.

Donc la série entière $\sum n^{\alpha-1}x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$.

b) Pour $x \in]0, 1[$, $g_\alpha(-n \ln x) = (-\ln x)^{\alpha-1}n^{\alpha-1}x^n = (-\ln x)^{\alpha-1}S_\alpha(x)$.

$-\ln x g_\alpha(-n \ln x) = (-\ln x)^\alpha S_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1, x < 1} \Gamma(\alpha) \neq 0$; donc $S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(-\ln x)^\alpha}$ au voisinage de 1^- . Comme

$\ln x \sim x - 1$ au voisinage de 1 : $S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$ au voisinage de 1^- .

III.

III.A -

Q 10. La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue sur $]0, 1[$. Équivalente en 0^+ à $t^{\alpha-1}$, elle est intégrable sur $]0, 1/2]$ si et s.si $\alpha - 1 > -1$, i.e. $\alpha > 0$. Équivalente en 1^- à $(1-t)^{\beta-1}$, elle est intégrable sur $[1/2, 1[$ si et s.si $\beta - 1 > -1$, i.e. $\beta > 0$. Elle est donc intégrable sur $]0, 1[$ si et s.si α et β sont strictement positifs.

Q 11.

(i) Égalité obtenue avec le changement de variable affine $t \mapsto u = 1 - t$, qui est C^1 et bijectif de $]0, 1[$ sur lui-même.

(ii) $u = \frac{t}{1-t} \iff t = \frac{u}{u+1}$; $u \mapsto t = \frac{u}{u+1}$ est un changement de variables C^1 et bijectif de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$;

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{(1+u)^2}; t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha+\beta-2} = u^{\alpha-1} \frac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}}.$$

$$\text{Donc } B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} \frac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}} \frac{1}{(1+u)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}} du.$$

(iii) Soit $\varepsilon \in]0, 1/2]$; par parties, $\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^\alpha(1-t)^{\beta-1} dt = \left[t^\alpha \frac{-(1-t)^\beta}{\beta} \right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} + \frac{\alpha}{\beta} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{\alpha-1}(1-t)^\beta dt$.

Comme α et β sont strictement positifs, $t^\alpha \frac{-(1-t)^\beta}{\beta}$ tend vers 0 quand t tend vers 0 ou 1;

$$\text{donc } \left[t^\alpha \frac{-(1-t)^\beta}{\beta} \right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

De plus, $t^{\alpha-1}(1-t)^\beta = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}(1-t) = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} - t^\alpha(1-t)^{\beta-1}$;

$$\text{donc } \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{\alpha-1}(1-t)^\beta dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} B(\alpha, \beta) - B(\alpha+1, \beta).$$

On en déduit : $B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\beta}(B(\alpha, \beta) - B(\alpha+1, \beta))$; puis : $B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha, \beta)$.

III.B -

Q 12. On suppose que $\forall \alpha, \beta > 2$, $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$.

Soit $\alpha, \beta > 0$.

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha} B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \frac{\alpha + 1 + \beta}{\alpha + 1} B(\alpha + 2, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \frac{\alpha + 1 + \beta}{\alpha + 1} B(\beta, \alpha + 2) \\ &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \frac{\alpha + 1 + \beta}{\alpha + 1} \frac{\alpha + \beta + 2}{\beta} B(\beta + 1, \alpha + 2) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \frac{\alpha + 1 + \beta}{\alpha + 1} \frac{\alpha + \beta + 2}{\beta} \frac{\alpha + \beta + 3}{\beta + 1} B(\beta + 2, \alpha + 2). \end{aligned}$$

Comme $\alpha + 2$ et $\beta + 2$ sont strictement supérieurs à 2 :

$$B(\beta + 2, \alpha + 2) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\beta + 2)}{\Gamma(\alpha + \beta + 4)} = \frac{(\alpha + 1)\alpha\Gamma(\alpha)(\beta + 1)\beta\Gamma(\beta)}{(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Après substitution et simplification : $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$.

Q 13.

a) Comme $\alpha - 1$ et $\beta - 1$ sont strictement plus grands que 1, $\psi_{\alpha, \beta}$ est de C^1 sur le segment $[0, 1]$, donc sa dérivée est bornée. Donc $\psi_{\alpha, \beta}$ est lipschitzienne.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $B(\alpha, \beta) - u_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\psi_{\alpha, \beta}(t) - \psi_{\alpha, \beta}\left(\frac{k}{n}\right) \right) dt$.

Comme, sur $[k/n, (k+1)/n]$, $\left| \psi_{\alpha, \beta}(t) - \psi_{\alpha, \beta}\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq A_{\alpha, \beta} \left| t - \frac{k}{n} \right| = A_{\alpha, \beta} \left(t - \frac{k}{n} \right)$, on a :

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\psi_{\alpha, \beta}(t) - \psi_{\alpha, \beta}\left(\frac{k}{n}\right) \right) dt \right| \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} A_{\alpha, \beta} \left(t - \frac{k}{n} \right) dt = A_{\alpha, \beta} \cdot \frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit : $|B(\alpha, \beta) - u_n(\alpha, \beta)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\psi_{\alpha, \beta}(t) - \psi_{\alpha, \beta}\left(\frac{k}{n}\right) \right) dt \right| \leq n \cdot \frac{A_{\alpha, \beta}}{2n^2} = \frac{A_{\alpha, \beta}}{2n}$.

c) Pour $x \in [0, 1]$, les séries $\sum n^{\alpha-1} x^n$ et $\sum n^{\beta-1} x^n$ convergent absolument, donc la série produit converge absolument et sa somme est le produit des sommes, soit $S_\alpha(x)S_\beta(x)$. Le terme d'ordre n de la série produit vaut : $\sum_{k=0}^n k^{\alpha-1} (n-k)^{\beta-1} x^n = n^{\alpha+\beta-2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\beta-1} x^n = n^{\alpha+\beta-1} u_n(\alpha, \beta) x^n$.

On en déduit que : $S_\alpha(x)S_\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1} u_n(\alpha, \beta) x^n$.

Par différence : $S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1} (u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)) x^n$.

Avec la majoration du (2.b), on obtient :

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1} |u_n(\alpha, \beta) - B(\alpha, \beta)| x^n \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-2} x^n = \frac{A_{\alpha, \beta}}{2} S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

En multipliant par $(1-x)^{\alpha+\beta}$:

$$\left| (1-x)^\alpha S_\alpha(x) \cdot (1-x)^\beta S_\beta(x) - B(\alpha, \beta) \cdot (1-x)^{\alpha+\beta} S_{\alpha+\beta}(x) \right| \leq \frac{A_{\alpha, \beta}}{2} (1-x) \cdot (1-x)^{\alpha+\beta-1} S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

Comme α , β , $\alpha + \beta$ et $\alpha + \beta - 1$ sont tous supérieurs à 1, on peut utiliser la question **Q 9** :

$$(1-x)^\alpha S_\alpha(x) \cdot (1-x)^\beta S_\beta(x) - B(\alpha, \beta) \cdot (1-x)^{\alpha+\beta} S_{\alpha+\beta}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1, x < 1} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha + \beta)$$

$$\text{et } \frac{A_{\alpha, \beta}}{2} (1-x) \cdot (1-x)^{\alpha+\beta-1} S_{\alpha+\beta-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1, x < 1} 0;$$

donc $|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha + \beta)| \leq 0$, i.e. $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha, \beta) = 0$.

III.C -

Q 14. Pour $\alpha \in]0, 1[$, $1 - \alpha \in]0, 1[$, donc $B(\alpha, 1 - \alpha)$ existe bien.

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^1 f(\alpha, t) dt \text{ avec } f : (\alpha, t) \mapsto t^\alpha (1-t)^{-\alpha}.$$

- Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $t \mapsto f(\alpha, t)$ est continue (par morceaux) sur $]0, 1[$.
- Pour tout $t \in]0, 1[$, $\alpha \mapsto f(\alpha, t)$ est continue sur $]0, 1[$.
- Domination de f sur le segment $[a, b] \subset]0, 1[$: comme une exponentielle de base inférieure à 1 est décroissante sur \mathbb{R} , $\forall t \in]0, 1[$, $\forall \alpha \in [a, b]$, $0 \leq f(\alpha, t) \leq t^{a-1}(1-t)^{-b}$ et $t \mapsto t^{a-1}(1-t)^{-b}$ est indépendante de α et intégrable sur $]0, 1[$ (comme en **Q 10**).

D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ est continue sur $]0, 1[$.

Q 15.

a) D'abord, $(2p+1)/(2q) \in]0, 1[$.

$$\text{D'après Q 11 (ii), } B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{(2(p-q)+1)/2q}}{1+t} dt.$$

Le changement de variable $u \mapsto t = u^{2q}$, difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui-même, permet d'obtenir :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2(p-q)+1}}{1+u^{2q}} \cdot 2qu^{2q-1} du = 2q \int_0^{+\infty} \frac{u^{2p}}{1+u^{2q}} du.$$

b) Les z_k , k compris entre 0 et $q-1$ et leurs opposés sont les $2q$ zéros de $X^{2q} + 1$ (et ils sont simples).

Comme $A = X^{2p}$ a un degré strictement inférieur à $B = X^{2q} + 1$, la partie entière de $\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$ est nulle. Le

développement en éléments simples de $\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$ s'écrit donc : $\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a_k}{X-z_k} + \frac{b_k}{X+z_k} \right)$, où les a_k et les

b_k sont des nombres complexes définis par : $a_k = \frac{A(z_k)}{B'(z_k)}$ et $b_k = \frac{A(-z_k)}{B'(-z_k)}$.

Or $B' = 2qX^{2q-1}$ et $z_k^{2q} = -1$; donc $B'(z_k) = -\frac{2q}{z_k}$ et $B'(-z_k) = \frac{2q}{z_k}$; d'où la formule de l'énoncé.

c) Vérification par simple dérivation.

Pour tout k compris entre 0 et $q-1$, la fonction :

$$\begin{aligned} \omega_k : t \mapsto & \left(\frac{1}{2} \ln((t - \operatorname{Re} z_k)^2 + (\operatorname{Im} z_k)^2) + i \arctan\left(\frac{t - \operatorname{Re} z_k}{\operatorname{Im} z_k}\right) \right) \\ & - \left(\frac{1}{2} \ln((t + \operatorname{Re} z_k)^2 + (-\operatorname{Im} z_k)^2) + i \arctan\left(\frac{t + \operatorname{Re} z_k}{-\operatorname{Im} z_k}\right) \right) \\ = & \frac{1}{2} \ln \frac{(t - \operatorname{Re} z_k)^2 + (\operatorname{Im} z_k)^2}{(t + \operatorname{Re} z_k)^2 + (\operatorname{Im} z_k)^2} + i \left(\arctan\left(\frac{t - \operatorname{Re} z_k}{\operatorname{Im} z_k}\right) + \arctan\left(\frac{t + \operatorname{Re} z_k}{\operatorname{Im} z_k}\right) \right) \end{aligned}$$

est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t-z_k} - \frac{1}{t+z_k}$.

Comme $\operatorname{Im} z_k = \sin \pi \frac{2k+1}{2q} > 0$, $\omega_k(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \pi i$; et $\omega_k(0) = 0$.

La fonction $\omega = -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \omega_k$ est une primitive de $t \mapsto \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}$.

De plus, $\omega(0) = 0$ et $\omega(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \pi i = -i \frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

On en déduit que : $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt = \lim_{+\infty} \omega - \omega(0) = -i \frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$.

Or $z_k^{2p+1} = e^{i\pi \frac{2p+1}{2q}} \cdot \left(e^{i\pi \frac{2p+1}{q}} \right)^k$ et $e^{i\pi \frac{2p+1}{q}} \neq 1$;

donc $\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} = e^{i\pi \frac{2p+1}{2q}} \cdot \frac{e^{i\pi \frac{2p+1}{q}} q - 1}{e^{i\pi \frac{2p+1}{q}} - 1} = e^{i\pi \frac{2p+1}{2q}} \cdot \frac{e^{i\pi(2p+1)} - 1}{e^{i\pi \frac{2p+1}{2q}} (e^{i\pi \frac{2p+1}{2q}} - e^{-i\pi \frac{2p+1}{2q}})} = \frac{-2}{2i \sin \pi \frac{2p+1}{2q}}$.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt = \frac{\pi}{2q} \frac{1}{\sin \pi \frac{2p+1}{2q}}$.

Q 16. Pour tout α de la forme $\alpha = \frac{2p+1}{2q}$, avec $0 < p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$, on a ainsi :

$$B(\alpha, 1-\alpha) = 2q \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

Comme $\alpha \mapsto B(\alpha, 1 - \alpha)$ et $\alpha \mapsto \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$ sont continues sur $]0, 1[$ et que l'ensemble des $\frac{2p+1}{2q}$, avec $0 < p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$, est dense dans $]0, 1[$, on peut affirmer : $\forall \alpha \in]0, 1[, B(\alpha, 1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$.

De plus, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = B(\alpha, 1 - \alpha)\Gamma(\alpha + (1 - \alpha)) = B(\alpha, 1 - \alpha)$.

IV.

IV.A -

Q 17. La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est continue sur $[0, x[$ et, pour tout $t \in [0, x[$, on a $\left| \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \right| \leq \frac{\|f\|}{(x-t)^\alpha}$; comme $t \mapsto \frac{1}{(x-t)^\alpha}$ est sur $[0, x[$ (de référence, avec $\alpha < 1$), $t \mapsto \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[0, x[$, donc sur $]0, x[$.

Q 18.

a) Pour $x \in]0, 1[$, changement de variable affine $u \mapsto t = ux \dots$ La formule reste valable pour $x = 0$ ($1 - \alpha > 0$).

b) Comme $x \mapsto x^{1-\alpha}$ est continue sur $[0, 1]$, il suffit de montrer la continuité de la fonction $x \mapsto \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt$.

- Pour tout $x \in [0, 1]$, $t \mapsto \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue (par morceaux) sur $[0, 1[$;

- pour tout $t \in [0, 1[$, $x \mapsto \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue sur $[0, 1]$;

- domination sur $[0, 1]$: pour tout $t \in [0, 1[$ et tout $x \in [0, 1]$, on a : $\left| \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} \right| \leq \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$; la fonction $t \mapsto \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$ est continue, intégrable sur $[0, 1[$ et indépendante de x .

Donc $x \mapsto \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt$ est continue sur $[0, 1]$; donc $A_\alpha f$ est continue sur $[0, 1]$.

c) Par linéarité de l'intégrale, A_α est linéaire. D'après (IV.A.2.b), A_α est un endomorphisme de E .

Continuité :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], |A_\alpha f(x)| \leq x^{\alpha-1} \cdot \int_0^1 \frac{|f(xt)|}{(1-t)^\alpha} dt \leq \int_0^1 \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha} dt = \|f\| \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \|f\|.$$

Donc, $\forall f \in E, \|A_\alpha f\| \leq \frac{1}{1-\alpha} \|f\|$. On en déduit que l'endomorphisme A_α est continu et que $\|A_\alpha\| \leq \frac{1}{1-\alpha}$.

De plus, si f est la fonction constante 1, $\|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha} \|f\|$. Donc $\|A_\alpha\| = \frac{1}{1-\alpha}$.

IV.B -

Q 19.

a) Pour $n = 1$, on reprend la méthode de majoration du (IV.A.2.c) :

$$\text{pour tout } x \in [0, 1], |A_\alpha(x)| \leq x^\beta \|f\| \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = x^\beta \|f\| \frac{1}{\beta} = x^\beta \|f\| \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Soit $n \geq 1$; on suppose : $\forall x \in [0, 1], |A_\alpha^n f(x)| \leq x^{n\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$.

$$\text{Soit } x \in [0, 1]; |A_\alpha^{n+1} f(x)| = x^\beta \left| \int_0^1 \frac{A_\alpha^n f(xt)}{(1-t)^\alpha} dt \right| \leq x^\beta \int_0^1 \frac{|A_\alpha^n f(xt)|}{(1-t)^\alpha} dt \leq x^\beta x^{n\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| \int_0^1 \frac{t^{n\beta}}{(1-t)^\alpha} dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} |A_\alpha^{n+1} f(x)| &\leq x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} B(n\beta+1, 1-\alpha) \|f\| = x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} B(n\beta+1, \beta) \|f\| \\ &= x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \frac{\Gamma(n\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma((n+1)\beta+1)} \|f\| = x^{(n+1)\beta} \frac{\Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta+1)} \|f\|. \end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |A_\alpha^n f(x)| \leq x^{n\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$.

b) On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|A_\alpha^n f\| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$. Autrement dit, l'endomorphisme A_α^n de E est continu et

$$\|A_\alpha^n\| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

Soit $\gamma > 0$; alors $\gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{(\gamma\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{1}{(\gamma\Gamma(\beta))^{(1/\beta)}} \frac{((\gamma\Gamma(\beta))^{(1/\beta)})^{n\beta+1}}{\Gamma(1+n\beta)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'après (I.3).

Q 20.

Q 21.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\lambda^n A_\alpha^n f\| \leq |\lambda|^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$.

Or $|\lambda|^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| = \left(\frac{1}{2}\right)^n (2|\lambda|)^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| = o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$; donc la série $\sum |\lambda|^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$ converge et la série $\sum \lambda^n A_\alpha^n f$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$.

b) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $(\text{Id } E - \lambda A_\alpha) \sum_{n=0}^N \lambda^n A_\alpha^n f = f - \lambda^{N+1} A_\alpha^{N+1} f$.

Or $\left(\sum_{n=0}^N \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers g ; $\left(\sum_{n=0}^N \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ est une suite d'éléments de E (i.e. de fonctions continues), donc g est continue ($g \in E$) et $\left(\sum_{n=0}^N \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge vers g dans E . Comme $\text{Id } E - \lambda A_\alpha$ est continu dans E , $\left((\text{Id } E - \lambda A_\alpha) \sum_{n=0}^N \lambda^n A_\alpha^n f\right)_N$ converge dans E , i.e. uniformément sur $[0, 1]$ vers $(\text{Id } E - \lambda A_\alpha)g$.

D'autre part, $(\lambda^{N+1} A_\alpha^{N+1} f)_N$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$, i.e. converge vers 0 dans E .

Donc $(\text{Id } E - \lambda A_\alpha)g = f$.

c) D'après la question précédente, $(\text{Id } E - \lambda A_\alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n = \text{Id } E$.

On montre de même : $\forall f \in E$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n\right) (\text{Id } E - \lambda A_\alpha)f = f$, i.e. $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n\right) (\text{Id } E - \lambda A_\alpha) = \text{Id } E$.

Donc $\text{Id } E - \lambda A_\alpha$ est inversible dans E , d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$.

IV.C -

Q 22.

a) $A_\alpha e_n(x) = x^\beta \int_0^1 \frac{(xt)^n}{(1-t)^\alpha} dt = x^{\beta+n} B(n+1, \beta) = x^{\beta+n} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}$; donc $A_\alpha e_n = B(n+1, \beta)e_{n+\beta} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} e_{n+\beta}$ en prolongeant la définition des e_k à $k \in [0, +\infty[$. Le résultat précédent reste vrai pour tout $n \in [0, +\infty[$.

b)

$$\begin{aligned} (A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} A_{1-\alpha}(e_{n+\beta}) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} \cdot \frac{\Gamma((n+\beta)+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma((n+\beta)+1+(1-\beta))} e_{(n+\beta)+1-\beta} \\ &= \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} e_{n+1} = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}{n+1} e_{n+1} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Q 23. Vrai par linéarité!

Q 24.

a) Pour tout $f \in E$, Pf est bien continu; de plus, P est linéaire.

Soit $f \in E$; alors $\forall x \in [0, 1]$, $|Pf(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^x \|f\| dt = \|f\| x \leq \|f\|$; donc $\|Pf\| \leq \|f\|$.

Donc P est linéaire continu et $\|P\| \leq 1$.

De plus, si f est l'application constante 1, alors $Pf : x \mapsto x$; donc $\|Pf\| = \|f\|$. Donc $\|P\| = 1$.

b) L'ensemble \mathcal{P} des fonctions polynômiales sur $[0, 1]$ est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|$ (théorème de Weierstrass).

Comme B_α et $\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} P$ sont deux applications continues sur E coïncidant sur \mathcal{P} , elles sont égales.

c) Comme P est à valeurs dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$, $D \circ B_\alpha$ est bien défini. Comme $D \circ P = \text{Id } E$, on a la formule de l'énoncé.

d) Soit $f \in E$ tel que $A_\alpha f = 0$; alors $B_\alpha f = 0$, donc $P \circ B_\alpha f = 0$; avec la relation du (IV.C.3.c), $f = 0$.

Donc l'opérateur (linéaire) A_α est injectif.