Le sujet comporte trois pages et deux problèmes indépendants inspirés par le sujet CCINP PSI - 2011. Il est rappelé que l'objectif n'est pas d'essayer de tout faire, mais plutôt de rédiger proprement une fraction raisonnable des réponses aux questions.

Il est demandé d'écrire lisiblement et de former des lettres et symboles qui soient clairement distinguables les uns des autres.

La rigueur des raisonnements ainsi que la lisibilité de la copie seront prises en compte dans l'appréciation.

tout passage sale ou écrit de manière illisible ne sera pas lu.

****

Problème 1 - Des séries

I. La série harmonique alternée

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Q 1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

Q 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Q 3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln 2$.

Il y a plusieurs façons de faire : entre autres, en utilisant le théorème de convergence dominée ou alors par encadrement.

On a donc montré :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

II. Deux séries

Dans cette partie, α désigne un réel appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$, φ est la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1}$.

Pour $t \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$.

Q 4. Montrer que $S_n(t) = \varphi(t)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$.

Q 5. Exprimer $\varphi(t)$ à l'aide de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}$ et $\sin(t/2)$ et en déduire que $\displaystyle\int_\pi^\alpha \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha-\pi}{2} - \mathrm{i}\ln(\sin(\alpha/2))$.

Q 6. Justifier que φ est de classe C^1 sur $]0, 2\pi[$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\pi^\alpha \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t = 0$. *On pourra utiliser une intégration par parties.*

Q 7. Expliciter $\displaystyle\int_\pi^\alpha S_n(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de s_n et de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}}{k}$. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}}{k}$ ainsi que la valeur de sa somme.

Q 8. Justifier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin(k\alpha)}{k}$ et donner la valeur de leurs sommes.

****

Problème 2 - Fonctions définies par des intégrales

Dans ce problème, g désigne une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ et continue. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues et intégrables sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $f \in E$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $\tilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(xt)\,\mathrm{d}t$ (sous réserve de définition).

I. Quelques résultats généraux et un exemple

Q 1. Montrer que si g est bornée, alors pour tout $f \in E$, la fonction $\tilde{f}$ est bien définie, bornée et continue sur $[0, +\infty[$.

Q 2. Montrer que si g a pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$, alors pour tout $f \in E$, la fonction $\tilde{f}$ est bien définie sur $[0, +\infty[$ et a une limite finie en $+\infty$ à préciser.

Q 3. Soit f un élément de E qui est de classe C^1. Dans cette question, on suppose d'abord que g est la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f| \leqslant \varepsilon$.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^a f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t = 0$. *On pourra utiliser une intégration par parties.*

c) Montrer que $\tilde{f}$ est bien définie sur $[0, +\infty[$ et déduire du **a)** que $\tilde{f}$ a pour limite 0 en $+\infty$.

On pourra utiliser la définition de limite avec ε et écrire $\tilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^a f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t$.

d) Et maintenant, que peut-on dire dans les cas où g est la fonction $t \mapsto \sin t$ ou $t \mapsto \cos t$?

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, g est la fonction $t \mapsto |\sin t|$.

D'après la partie précédente, on peut toujours définir $\tilde{f}$ pour tout $f \in E$, puisque g est bornée.

II. Étude d'un cas particulier

Dans cette partie, f est la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$.

Q 4. Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\theta(y) = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\gamma t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Q 5. Montrer que pour tout $x > 0$, $\tilde{f}(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}|\sin u|\,\mathrm{d}u$.

Q 6. Exprimer pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}|\sin u|\,\mathrm{d}u$ en fonction de $\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}$ et $\theta(\gamma)$ pour un certain γ à préciser.

Q 7. Justifier que pour $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}$ converge et donner la valeur de sa somme.

Q 8. Pour $x > 0$, calculer $\tilde{f}(x)$ et déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \tilde{f}(x)$.

Dans la suite du problème, on admet l'égalité suivante :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad |\sin t| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - 4k^2}\cos(2kt)}$$

Celle-ci se démontre à l'aide de résultats issus de la théorie des séries de Fourier.

III. Un cas un peu plus général

Dans cette partie, on suppose que $f \in E$ est de classe C^1 et f' est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Q 9. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{1-4k^2} \cos(2kt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Q 10. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$ et que f a une limite en $+\infty$, qui est 0. *On pourra considérer* $\displaystyle\int_0^x f'$.

Q 11. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ et $x > 0$, $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2kx}\left(\int_0^{+\infty} |f'|\right)$.

Q 12. On pose $h : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-4k^2}\cos(2kt)$.

Montrer qu'il existe une constante M telle que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M}{x}$.

Q 13. Montrer que $\tilde{f}(x)$ a une limite finie en $+\infty$ à préciser.

IV. Un cas encore plus général

Dans cette partie, on suppose seulement que $f \in E$ est de classe C^1.

Q 14. À l'aide de la question **Q 3**, montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t = 0$.

Q 15.

a) Montrer qu'il existe une constante M telle que

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t = 0$.

Q 16. Montrer que $\tilde{f}(x)$ a une limite finie en $+\infty$ à préciser.

****

Problème 1

I.

Q 1. Critère spécial des séries alternées (CCSA) : la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est positive, décroissante et converge vers 0 donc la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

Q 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (-t)^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = s_n$

Q 3. Le plus simple : $\displaystyle s_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln 2 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

Or pour tout $t\in[0,1]$, $0\leqslant \dfrac{t^n}{1+t}\leqslant t^n$ donc $\displaystyle 0\leqslant \left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$, donc d'après le th. d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}s_n = \ln 2$.

II.

Q 4. $S_n(t)$ est la somme des premiers termes de la suite géométrique de terme général $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^k$, de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\neq 1$, donc $S_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\dfrac{1-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(\mathrm{e}^{int}-1) = \varphi(t)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$.

Q 5. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}\times 2\mathrm{i}\sin(t/2)$ donc $\varphi(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}}}{2\mathrm{i}\sin(t/2)}$. Donc

$$\begin{aligned}\int_\pi^\alpha \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t &= \int_\pi^\alpha \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}}{2\mathrm{i}\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t = \int_\pi^\alpha \frac{\cos(t/2)+\mathrm{i}\sin(t/2)}{2\mathrm{i}\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{-\mathrm{i}}{2}\int_\pi^\alpha \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t + \int_\pi^\alpha \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= -\mathrm{i}\Big[\ln(\sin(t/2))\Big]_{t=\pi}^{\alpha} + \frac{\alpha-\pi}{2}\\ &= \frac{\alpha-\pi}{2} - \mathrm{i}\ln(\sin(\alpha/2))\end{aligned}$$

Q 6. φ est un quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0,2\pi[$ donc elle est elle-même de classe C^1 sur $]0,2\pi[$.

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_\pi^\alpha \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t &= \left[\varphi(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{\mathrm{i}(n+1)}\right]_\pi^\alpha - \int_\pi^\alpha \varphi'(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{\mathrm{i}(n+1)}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\varphi(\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha} - \varphi(\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\pi} + \mathrm{i}\int_\pi^\alpha \varphi'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

donc par inégalités triangulaires

$$\left|\int_\pi^\alpha \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\left(|\varphi(\alpha)| + |\varphi(\pi)| + \int_\pi^\alpha |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t\right)$$

donc d'après le th. d'encadrement,

$$\int_\pi^\alpha \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Q 7.

$$\begin{aligned}\int_\pi^\alpha S_n(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^n \int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{\mathrm{i}k}\right]_\pi^\alpha = \sum_{k=1}^n\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}}{\mathrm{i}k}\right) = \sum_{k=1}^n\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}-(-1)^k}{\mathrm{i}k}\right)\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{k=1}^n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}}{k} + \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{k=1}^n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}}{k} + \frac{1}{\mathrm{i}}s_n\end{aligned}$$

Or on a aussi d'après **Q 4** : $\displaystyle\int_\pi^\alpha S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\pi^\alpha \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t - \int_\pi^\alpha \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$

donc d'après **Q 5** : $\displaystyle\int_\pi^\alpha S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\pi^\alpha \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t - \frac{\alpha-\pi}{2} + \mathrm{i}\ln(\sin(\alpha/2))$.

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}}{k} = \mathrm{i}\int_\pi^\alpha \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\frac{\alpha-\pi}{2} - \ln(\sin(\alpha/2)) - s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln 2 - \ln(\sin(\alpha/2)) + \mathrm{i}\frac{\pi-\alpha}{2} \text{ d'après } \mathbf{Q\ 6}.$$

La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}}{k}$ converge donc et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}}{k} = -\ln 2 - \ln(\sin(\alpha/2)) + \mathrm{i}\frac{\pi-\alpha}{2}$.

Q 8. Les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin(k\alpha)}{k}$ sont les parties réelle et imaginaire de la série précédente, donc elles convergent toutes les deux et de plus

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k} = -\ln 2 - \ln(\sin(\alpha/2)) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} = \frac{\pi-\alpha}{2}$$

Problème 2

I.

Q 1. Si g est bornée, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $|g(t)| \leqslant M$ donc pour tout $f \in E$ et tout $x, t \geqslant 0$, $|g(xt)f(t)| \leqslant M|f(t)|$.

Or f est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc par th. de comparaison d'intégrales de fonctions à valeurs positives (TCIFP), $t \mapsto f(t)g(xt)$ l'est aussi, ce qui justifie la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(xt)\,\mathrm{d}t$.

De plus, pour tout $x \geqslant 0$, $|\tilde{f}(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} M|f(t)|\,\mathrm{d}t = M\int_0^{+\infty} |f|$, donc $\tilde{f}$ est bornée.

Enfin,
- pour tout $t \geqslant 0$, $x \mapsto g(xt)f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$
- pour tout $t \geqslant 0$, pour tout $x \geqslant 0$, $|g(xt)f(t)| \leqslant M|f(t)|$ et $M|f|$ est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ (hypothèse de domination)

donc d'après le th. de continuité sous le signe $\displaystyle\int$, $\tilde{f}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Q 2. Si g a pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$, alors g est bornée au voisinage de $+\infty$: il existe $A > 0$ tel que g est bornée sur $[A, +\infty[$.

Sur le segment $[0, A]$, g est continue donc y est bornée (th. des bornes atteintes), donc finalement, g est bornée sur $[0, +\infty[$. D'après la question précédente, pour tout $f \in E$, $\tilde{f}$ est bien définie.

De plus, avec les mêmes notations,
- pour tout $t > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(xt)f(t) = \ell f(t)$
- pour tout $t \geqslant 0$, pour tout $x \geqslant 0$, $|g(xt)f(t)| \leqslant M|f(t)|$ et $M|f|$ est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ (hypothèse de domination)

donc d'après le th. de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} \ell f(t)\,\mathrm{d}t = \ell\int_0^{+\infty} f$.

Q 3.

a) Comme f est intégrable sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f|$ converge, donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_a^{+\infty} |f| = 0$: il existe donc $a > 0$ tel que $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f| \leqslant \varepsilon$.

b) C'est la même idée que dans le problème 1 :

Par intégration par parties, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^a f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}}{\mathrm{i}x}\right]_0^a - \int_0^a f'(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}}{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\left(f(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)a} - f(0) + \mathrm{i}\int_0^a f'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

donc par inégalités triangulaires

$$\left|\int_0^a f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}\left(|f(a)|+|f(0)|+\int_0^a |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)$$

donc d'après le th. d'encadrement,

$$\int_0^a f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

c) g est bornée, donc d'après la question **Q 1**, $\tilde{f}$ est bien définie.

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $x, t \geqslant 0$, $|f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}| = |f(t)|$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$, donc par inégalité triangulaire, $\displaystyle\left|\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$.

On a donc $\displaystyle\left|\tilde{f}(x)\right| = \left|\int_0^a f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^a f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^a f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| + \varepsilon$

Puis on fait tendre x vers $+\infty$:

d'après la question précédente, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $\displaystyle\left|\int_0^a f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$.

Donc pour tout $x \geqslant x_0$, $\left|\tilde{f}(x)\right| \leqslant 2\varepsilon$.

On a donc montré :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 > 0 \quad \forall x \geqslant x_0 \quad \left|\tilde{f}(x)\right| \leqslant 2\varepsilon$$

ce qui signie que $\tilde{f}$ a pour limite 0 en $+\infty$.

d) Dans la question **Q 3 b**, on a montré : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t = 0$.

Donc les parties réelle et imaginaire de cette intégrale tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$, en particulier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$

II.

Q 4. $\mathrm{e}^{\gamma t}\sin(t)$ est la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, donc on calcule d'abord $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$ et $\theta(y)$ en est la partie imaginaire.

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{e}^{(\gamma+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{(\gamma+\mathrm{i})t}}{\gamma+\mathrm{i}}\right]_0^\pi = \frac{\mathrm{e}^{(\gamma+\mathrm{i})\pi}-1}{\gamma+\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{e}^{\gamma\pi}+1}{\gamma+\mathrm{i}} = -(\mathrm{e}^{\gamma\pi}+1)\frac{\gamma-\mathrm{i}}{\gamma^2+1}$$

donc $\theta(y) = \dfrac{\mathrm{e}^{\gamma\pi}+1}{\gamma^2+1}$.

Q 5. Changement de variable $u = xt$ (qui est un changement de variable bijectif et C^1) :

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}|\sin u|\frac{\mathrm{d}u}{x}.$$

Q 6. Par changement de variable $t = u - k\pi$:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}|\sin u|\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-\frac{t+k\pi}{x}}|\sin t|\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \sin(t+k\pi) = (-1)^k\sin t.$$

donc $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}|\sin u|\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-\frac{t}{x}}.\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}\theta\left(\frac{-1}{x}\right)$

Q 7. La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}$ est une série géométrique de raison $r = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}$ et $|r| < 1$ (car $x > 0$), donc la série est convergente.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}}$.

Q 8. $\displaystyle\tilde{f}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}|\sin u|\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}|\sin u|\,\mathrm{d}u$ (par relation de Chasles sur une intégrale convergente), donc $\tilde{f}(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}\theta\left(\dfrac{-1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}\theta\left(\dfrac{-1}{x}\right)\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}$ d'après la question **Q 6**

donc $\tilde{f}(x) = \dfrac{1}{x}\theta\left(\dfrac{-1}{x}\right)\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}} = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}} \times \dfrac{x}{\pi^2+x^2}$ d'après **Q 4**.

$\dfrac{x}{\pi^2+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$ donc $\tilde{f}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (1+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}) \times \dfrac{\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}}$.

Or $\mathrm{e}^t - 1 \underset{t\to0}{\sim} t$ donc $1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{x}$ donc $\tilde{f}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{f}(x) = \dfrac{2}{\pi}$.

III.

Q 9. Pour tout $k \geqslant 1$, $\left|\dfrac{1}{1-4k^2}\cos(2kt)\right| \leqslant \dfrac{1}{4k^2-1}$ et $\dfrac{1}{4k^2-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4k^2}$, donc par th. de comparaison de séries à termes positifs (TCSTP), la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\dfrac{1}{1-4k^2}\cos(2kt)$ est absolument convergente.

Q 10. Pour tout $x \geqslant 0$, $|f(x)-f(0)| = \left|\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$,

donc $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \displaystyle\int_0^{+\infty}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$. Donc f est bornée sur $[0,+\infty[$.

De plus, comme f' est intégrable, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f' \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f'$.

f a donc une limite en $+\infty$, mais comme f est intégrable, cette limite est nécessairement 0, sinon f ne serait pas intégrable sur $[0,+\infty[$ (voir cours).

Q 11. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t$ converge, car f est supposée intégrable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $t \geqslant 0$, $|f(t)\cos(2kxt)| \leqslant |f(t)|$, donc par TCIFP, $t \mapsto f(t)\cos(2kxt)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On effectue une intégration par parties sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{\sin(2kxt)}{2kx}\right]_{t=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f'(t)\frac{\sin(2kxt)}{2kx}\,\mathrm{d}t.$$

Comme f a pour limite 0 en $+\infty$, il vient $\left[f(t)\dfrac{\sin(2kxt)}{2kx}\right]_{t=0}^{+\infty} = 0$, ce qui valide l'intégration par parties, et il vient

$$\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} f'(t)\frac{\sin(2kxt)}{2kx}\,\mathrm{d}t$$

Puis par inégalité triangulaire, $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{2kx}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}|f'(t)\sin(2kxt)|\,\mathrm{d}t\right)$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f'(t)\sin(2kxt)|\,\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$, d'où $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{2kx}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}|f'|\right)$.

Q 12. Pour $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t = \displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{f(t)}{1-4k^2}\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t$. On veut intervertir les symboles $\sum$ et $\int$.

Pour cela, on considère la série des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\dfrac{f(t)}{1-4k^2}\cos(2kxt)\right|\,\mathrm{d}t$: pour tout $k \geqslant 1$,

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{f(t)}{1-4k^2}\cos(2kxt)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{f(t)}{1-4k^2}\right|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty}|f|.$$

Donc par TCSTP, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\int_0^{+\infty}\left|\dfrac{f(t)}{1-4k^2}\cos(2kxt)\right|\,\mathrm{d}t$ converge, donc on peut utiliser le th. d'intégration terme à terme :

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{1-4k^2}\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right| = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\left|\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right|$$

puis grâce à la question précédente,

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} \times \frac{1}{2kx}\int_0^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Donc en posant $M = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(4k^2-1)} \times \int_0^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$, on a

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M}{x}$$

Q 13. La question précédente permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t = 0$ par encadrement.

Puis grâce à l'égalité admise dans l'énoncé,

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}h(xt)\right) f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f + \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f$$

IV.

Q 14. Pour tout $k \geqslant 1$, d'après **Q 3 d**, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t = 0$ (en remplaçant x par $2kx$).

Donc par opérations sur les limites, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t = 0$.

Q 15.

a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par inégalités triangulaires,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty}\left|\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} |f(t)\cos(2kxt)|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t = M\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\end{aligned}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{4k^2-1}$ est convergente, donc son reste partiel tend vers 0 :

il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $M\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1} \leqslant \varepsilon$

donc par inégalité triangulaire et la question **a)**,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right| + \varepsilon\end{aligned}$$

Or d'après la question **Q 14**, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{N}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$

don pour tout $x \geqslant x_0$, $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$.

On a montré :

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists x_0 > 0 \quad \forall x \geqslant x_0 \quad \left|\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

ce qui signie $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)h(xt)\,\mathrm{d}t = 0$.

Q 16. On conclut de la même façon qu'en **Q 13**.