Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p (\ln t)^q \, \mathrm{d}t$.

Q 1. Montrer l'existence des intégrales $I(p,q)$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Q 2. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $I(p,q) = \dfrac{-q}{p+1} I(p,q-1)$. Déduisez-en la valeur de $I(p,q)$.

Q 3. Montrer que l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^t} \, \mathrm{d}t$ converge.

Q 4. Montrer que $K = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exercice hebdomadaire 7 - Corrigé

Q 1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $t \mapsto t^p(\ln t)^q$ est continue sur $]0, 1]$.

Si $p > 0$, alors $\lim\limits_{t\to 0} t^p(\ln t)^q = 0$ (par comparaison asymptotique classique) donc on a une fausse singularité en 0 : l'intégrale $I(p, q)$ converge.

Si $p = 0$, alors $(\ln t)^q = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ quand $t \to 0$, or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge donc $I(p, q)$ converge (absolument).

Q 2. On effectue une intégration par parties : sous réserve de convergence, on a

$$I(p,q) = \int_0^1 t^p(\ln t)^q\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}(\ln t)^q\right]_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{1}{p+1}t^{p+1} \times q\frac{1}{t}(\ln t)^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

Or l'intégrale de droite vaut $\dfrac{-q}{p+1}I(p, q-1)$, donc est une intégrale convergente, donc l'intégration par parties est licite. De plus, le crochet de variations vaut 0, donc $I(p, q) = \dfrac{-q}{p+1}I(p, q-1)$.

Par une simple récurrence sur q, on en déduit que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$I(p,q) = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q}I(p,0) = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q} \times \frac{1}{p+1} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$$

Q 3. Pour tout $t > 0$, $t^t = e^{t\ln t}$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^t}$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, elle a pour limite 1 en 0 (fausse singularité) donc $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q 4. Il est bien connu que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$. Donc pour tout $t > 0$, $\dfrac{1}{t^t} = e^{-t\ln t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t\ln t)^n}{n!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{(-t\ln t)^n}{n!}\right|\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(-t\ln t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{n!}I(n,n) = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ converge car dès que $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Donc d'après le th. d'intégration terme à terme, on en déduit que

$$K = \int_0^1 \frac{1}{t^t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t\ln t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-t\ln t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$$