On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t$.

Q 1. Donner le domaine de définition de f.

Q 2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Q 3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Q 4. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Q 5. Donner une expression explicite de $f(x)$ en fonction de x et $f(1)$.

Note culturelle : on peut montrer après quelques détours que $f(1) = -\gamma$ où γ est la fameuse constante d'Euler-Mascheroni définie de la façon suivante

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Exercice hebdomadaire 6 - Corrigé

Q 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \ln(t)\, e^{-xt}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

On peut tout de suite remarquer que si $x \leqslant 0$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \ln(t)\, e^{-xt} = +\infty$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(t)\, e^{-xt}\, dt$ est grossièrement divergente. On suppose donc désormais $x > 0$.

Alors quand $t \to +\infty$, $\ln(t)\, e^{-xt} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc la fonction $t \mapsto \ln(t)\, e^{-xt}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(t)\, e^{-xt}\, dt$ est convergente.

De même, quand $t \to 0$, $\ln(t)\, e^{-xt} \sim \ln(t)$, or $\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc la fonction $t \mapsto \ln(t)\, e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, e^{-xt}\, dt$ est convergente.

Au total, $f(x)$ est définie si et seulement si $x > 0$.

Q 2. Pour tout $t > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(t)\, e^{-xt} = 0$.

De plus, pour tout $x \geqslant 1$, alors pour tout $t > 0$, $|\ln(t) e^{-xt}| \leqslant |\ln(t)| e^{-t}$ et on a montré dans la question précédente l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto |\ln(t)| e^{-t}$.

Donc d'après le th. de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} \ln(t)\, e^{-xt}\, dt = \int_0^{+\infty} 0\, dt = 0$.

Q 3. On note $g(x, t) = \ln(t)\, e^{-xt}$ pour x et t strictement positifs. Soit $a > 0$.

— g est évidemment de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$ et pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -t \ln(t) e^{-xt}$.

— Pour tout $x > 0$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (voir question 1).

— Pour tout $x \in [a, +\infty[$, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| = t|\ln(t)| e^{-xt} \leqslant t|\ln(t)| e^{-at}$ (*).

Or $\lim\limits_{t \to 0} t \ln(t) e^{-at} = 0$ et $t \ln(t) e^{-at} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to +\infty$, donc la fonction $t \mapsto t|\ln(t)| e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. L'inégalité (*) est donc une hypothèse de domination sur $[a, +\infty[$.

D'après le th. de dérivabilité sous le signe intégral, f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, par réunion d'intervalles, f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t \ln(t) e^{-xt}\, dt$.

Q 4. Pour $x > 0$, on calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \ln(t) e^{-xt}\, dt$ par intégration par parties en intégrant le facteur e^{-xt} et en dérivant le facteur $t \ln(t)$:

sous réserve de convergence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \ln(t) e^{-xt}\, dt = \left[t \ln(t) \times \frac{-e^{-xt}}{x}\right]_{t=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (1 + \ln(t)) \times \frac{-e^{-xt}}{x}\, dt$

or le crochet de variations vaut 0, car $\lim\limits_{t \to 0} t \ln(t) e^{-xt} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} t \ln(t) e^{-xt} = 0$, tout ça grâce aux résultats sur les comparaisons asymptotiques entre les fonctions puissances, logarithme et exponentielle.

Donc l'intégration par parties est licite, puisque l'intégrale de gauche converge, et donc celle de droite aussi.

Il vient alors $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + \ln(t)) \times \frac{-e^{-xt}}{x}\, dt = \frac{-1}{x}\left(\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt + \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-xt}\, dt\right) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} f(x)$.

f est donc solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{-1}{x^2}$.

Q 5. On résout cette équation selon les méthodes vues en MP2I, on trouve les solutions de l'équation homogène associée $x \mapsto \lambda \dfrac{1}{x}$ et une solution particulière par variation de la constante $x \mapsto -\dfrac{\ln x}{x}$.

Il existe donc une constante λ telle que $f : x \mapsto \lambda \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}$.

En évaluant en 1, on trouve $\lambda = f(1)$, donc f est la fonction $x \mapsto \dfrac{f(1) - \ln x}{x}$.