

Problème 1 - Inégalité de Bernstein et transformée de Fourier

Ce problème est tiré du sujet Centrale 2 - MP - 2021

Dans ce problème,

- pour $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est de classe \mathcal{C}^k si elle est k fois dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée k -ième continue sur \mathbb{R} (si $k = 0$, f est continue); on dit que f est \mathcal{C}^∞ si f est \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k (respectivement \mathcal{C}^∞) sur \mathbb{R} ; on note $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} continues et intégrables sur \mathbb{R} ;
- pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$;
- on note $L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} continues et bornées sur \mathbb{R} ;
- pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$;
- plus généralement, si f est une fonction bornée sur une partie A , on note $\|f\|_\infty^A = \sup_A |f|$.

On admet que $L^1(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ ($k \in \mathbb{N}$) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. On admet également que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur $L^1(\mathbb{R})$ et que $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur $L^\infty(\mathbb{R})$. On dispose ainsi des espaces vectoriels normés $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

I. Transformée de Fourier d'une fonction

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f et on note \hat{f} la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

- Q 1.** Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, \hat{f} est définie et continue sur \mathbb{R} .
- Q 2.** Montrer que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
- Q 3.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit g la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que $g(x) = f(\lambda x)$ pour tout x .
Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout réel ξ , exprimer $\hat{g}(\xi)$ à l'aide de \hat{f} , de ξ et de λ .

II. Produit de convolution

Si f et g sont deux fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur \mathbb{R} , on appelle produit de convolution de f et g , et on note $f * g$, la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

On suppose désormais et jusqu'à la fin de la partie II que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

- Q 4.** Montrer que $f * g$ est définie sur \mathbb{R} et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = (g * f)(x)$$

- Q 5.** Montrer que $f * g$ est bornée et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.
- Q 6.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si g est de classe \mathcal{C}^k et si les fonctions $g^{(j)}$ sont bornées pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, alors $f * g$ est de classe \mathcal{C}^k et $(f * g)^{(k)} = f * (g^{(k)})$.
- Q 7.** On suppose toujours que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on suppose de plus que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.

En admettant que, pour tout ξ réel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t) dt \right) dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t) dx \right) dt$$

existent et sont égales, montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$

III. Introduction d'une fonction plateau

On cherche dans cette sous-partie à construire une fonction réelle positive ρ , définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , telle que $\rho(t) = 1$ pour tout $t \in [-1, 1]$ et $\rho(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$.

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-1/t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 8. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

On pourra montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \exists P_k \in \mathbb{R}[X], \forall t > 0, \varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t)e^{-1/t}$.

Soit ψ la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]-1, 1[\\ e^{1/(t^2-1)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 9. Montrer, en l'exprimant à l'aide de φ , que ψ est de classe \mathcal{C}^∞ .

Q 10. Soit θ l'unique primitive de ψ s'annulant en 0. Montrer que θ est de classe \mathcal{C}^∞ , constante sur $] -\infty, -1[$ (on note A cette constante) et constante sur $[1, +\infty[$ (on note B cette constante). Vérifier que $A \neq B$.

Q 11. Construire alors une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, constante égale à 1 sur $[-1, 1]$ et constante égale à 0 sur $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$.

IV. Inégalités de Bernstein

On admet les formules suivantes, dites formules d'inversion de Fourier :

— si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$;

— si $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$, si a est la fonction de \mathbb{R} dans $\mathbb{C} : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \alpha(\xi) d\xi$, et si $a \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\alpha = \hat{a}$.

On remarque que ces résultats permettent d'affirmer que, si f et g sont deux fonctions continues telles que f, g, \hat{f} et \hat{g} sont intégrables et si $\hat{f} = \hat{g}$, alors $f = g$.

On considère toujours la fonction ρ définie à la question 11.

Soit r la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que, pour tout réel x ,

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi$$

Q 12. Montrer que r est dérivable sur \mathbb{R} et donner une expression de sa fonction dérivée (faisant éventuellement intervenir une intégrale).

Q 13. Montrer que $x \mapsto x^2 r(x)$ est bornée sur \mathbb{R} et en déduire que r est intégrable et bornée sur \mathbb{R} .

On admet qu'en utilisant la même méthode, on montre que r' est intégrable et bornée sur \mathbb{R} .

Soit $\lambda > 0$ et soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et telle que \hat{f} soit nulle en dehors du segment $[-\lambda, \lambda]$.

On note r_λ la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que $r_\lambda(x) = r(\lambda x)$ pour tout réel x .

Q 14. On admet que $f * r_\lambda$ est intégrable. Montrer que $f = \lambda f * r_\lambda$.

Q 15. En déduire que, si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$, indépendante de λ et de f , telle que

$$\|f'\|_\infty \leq C\lambda \|f\|_\infty$$

Problème 1

I.

Q 1. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur \mathbb{R} .
 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur \mathbb{R} .
 - On a l'hypothèse de domination : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, |f(x)e^{-ix\xi}| \leq |f(x)|$ et la fonction $|f|$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}
- Ainsi, la fonction \hat{f} est définie continue sur \mathbb{R} .

$$\boxed{\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$$

Q 2. L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire (linéarité du passage à l'intégrale). Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, |\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ix\xi}| dx = \|f\|_1$$

et donc $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ avec

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

Ceci montre que l'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ est continue et même 1-lipschitzienne (pour les normes proposées).

$$\boxed{f \mapsto \hat{f} \text{ est continue de } (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \text{ dans } (L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)}$$

Q 3. f étant continue, g l'est aussi. De plus, le changement de variable linéaire $u = \lambda x$ donne

$$\int_0^a |g(x)| dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda a} |f(u)| du$$

et cette quantité admet une limite finie quand $a \rightarrow +\infty$ et aussi quand $a \rightarrow -\infty$. Il y a donc intégrabilité aux voisinages des infinis et

$$\boxed{g \in L^1(\mathbb{R})}$$

On peut alors écrire $\hat{g}(\xi)$ et le même changement de variable donne

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\xi u/\lambda} du$$

et ainsi

$$\boxed{\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)}$$

II.

Q 4. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur \mathbb{R} . On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq |f(t)||g|_\infty$$

f étant intégrable sur \mathbb{R} , la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ l'est aussi, ce qui assure la définition de $f * g$ sur \mathbb{R} .

Le changement de variable $u = x - t$ donne immédiatement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u) du = (g * f)(x)}$$

Q 5. L'inégalité de la question précédente entraîne que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |(f * g)(x)| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$$

et ainsi

$$\boxed{f * g \text{ est bornée et } \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty}$$

Q 6. On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur \mathbb{R} .
- $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto f(t)g(x-t)$ est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} de dérivée p -ième $x \mapsto f(t)g^{(p)}(x-t)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(t)g^{(p)}(x-t)$ est continue sur \mathbb{R} .
- $\forall x, t \in \mathbb{R}, \forall p \in \llbracket 0, k \rrbracket, |f(t)g^{(p)}(x-t)| \leq \|g^{(p)}\|_\infty |f(t)|$ et ce majorant est intégrable sur \mathbb{R} .

Le théorème s'applique et donne que $f * g$ est de classe \mathcal{C}^k avec

$$\boxed{(f * g)^{(k)} = f * (g^{(k)})}$$

Q 7. Par définition

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t) dt \right) dx$$

Avec le résultat admis,

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(t)g(x-t) dx \right) dt$$

On pose $u = x - t$ dans l'intégrale intérieure :

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(u+t)\xi} f(t)g(u) du \right) dt$$

et on peut factoriser dans l'intégrale les termes indépendants de la variable u

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t) e^{-it\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\xi} g(u) du \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} \hat{g}(\xi) dt$$

Là encore $\hat{g}(\xi)$ peut sortir de l'intégrale et on obtient $\hat{f}(x)\hat{g}(x)$.

$$\boxed{\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}}$$

III.

Q 8. φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} par théorèmes d'opération. On prouve par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists P_k \in \mathbb{R}[X], \forall t > 0, \varphi^{(k)}(t) = P_k(1/t) e^{-1/t}$$

- C'est vrai au rang 0 avec $P_0 = 1$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $k \geq 0$. On peut alors redériver et obtenir

$$\forall t > 0, \varphi^{(k)}(t) = \left(-\frac{1}{t^2} P_k'(1/t) + \frac{1}{t^2} P_k(1/t) \right) e^{-1/t}$$

$P_{k+1} = X^2(-P_k' + P_k)$ est un polynôme convenable au rang $k+1$.

φ est aussi de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{-*} à dérivée nulle. Par le théorème de limite de la dérivée, il suffit de montrer que toutes les dérivées ont une limite finie à droite et gauche en 0 et que ces limites sont égales pour conclure que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . C'est le cas avec une limite nulle (évident à gauche et croissances comparées à droite).

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

Q 9. On vérifie que

$$\forall t, \psi(t) = \varphi(1-t^2)$$

En effet, si $|t| \geq 1, 1-t^2 \leq 0$ et $\varphi(1-t^2) = 0 = \psi(t)$ et si $|t| < 1, 1-t^2 > 0$ et $\varphi(1-t^2) = e^{1/(t^2-1)} = \psi(t)$. Par théorèmes d'opération,

$$\boxed{\psi \in \mathcal{C}^\infty}$$

Q 10. $\boxed{\theta \in \mathcal{C}^\infty}$ comme primitive d'une telle fonction. De plus θ' est nulle sur chaque intervalle $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ et donc θ est constante sur chacun de ces intervalles.

$$\boxed{\theta \text{ est constante sur }]-\infty, -1] \text{ et sur } [1, +\infty[}$$

Par théorème fondamental,

$$\theta(x) = \int_0^x \psi(t) dt$$

et les constantes sont

$$A = - \int_{-1}^0 e^{\frac{1}{t^2-1}} dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 e^{\frac{1}{t^2-1}} dt$$

Dans les deux cas, on intègre une fonction continue positive non nulle et les intégrales sont > 0 . Ainsi

$$\boxed{A < 0 < B}$$

et les constantes sont en particulier différentes.

Q 11. Notons $h_1 = \frac{\psi - A}{B - A}$: c'est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , nulle sur $]-\infty, -1]$ et valant 1 sur $[1, +\infty[$. $h_1(2x+3)$ vaut 0 si $x \leq -2$ et vaut 1 si $x \geq -1$.

Notons $h_2 = \frac{\psi - B}{A - B}$: c'est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , nulle sur $[1, +\infty[$ et qui vaut 1 sur $]-\infty, -1]$. $h_2(2x-3)$ vaut 0 si $x \geq 2$ et vaut 1 si $x \leq 1$.

La fonction $\rho = h_1 h_2$ est nulle hors de $]-2, 2[$ et vaut 1 sur $[-1, 1]$.

IV.

Q 12. On remarque tout d'abord que

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} e^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi$$

On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- Pour tout x , $\xi \mapsto e^{ix\xi} \rho(\xi)$ est continue sur le segment et donc intégrable sur ce segment.
- Pour tout $\xi \in [-2, 2]$, $x \mapsto e^{ix\xi} \rho(\xi)$ est de classe C^1 de dérivée $x \mapsto i\xi e^{ix\xi} \rho(\xi)$.
- Pour tout x , $\xi \mapsto i\xi e^{ix\xi} \rho(\xi)$ est continue.
- On a enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\xi \in [-2, 2]$, $|i\xi e^{ix\xi} \rho(\xi)| \leq 2\|\rho\|_\infty^{[-2,2]}$ qui est intégrable sur le segment $[-2, 2]$.

$$\boxed{r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ et } r'(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{ix\xi} \rho(\xi) d\xi}$$

Q 13. Utilisons à nouveau l'expression ci-dessus de r . Par intégrations par parties (sur un segment) et comme ρ et toutes ses dérivées sont nulles en 2 et -2 , on trouve

$$2\pi x^2 r(x) = i \int_{-2}^{+2} x e^{ix\xi} \rho'(\xi) d\xi = - \int_{-2}^{+2} e^{ix\xi} \rho''(\xi) d\xi$$

et ainsi

$$|x^2 r(x)| \leq \frac{1}{2\pi} 4 \|\rho''\|_\infty^{[-2,2]}$$

$$\boxed{x \mapsto x^2 r(x) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$$

r est continue sur \mathbb{R} et les seuls problèmes d'intégrabilité sont au voisinage des infinis. En notant M un majorant de $x^2 r(x)$, on a $|r(x)| \leq M/x^2$ qui prouve cette intégrabilité par comparaison aux fonctions de Riemann.

$$\boxed{r \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$$

Enfin, on a $|r(x)| \leq \frac{2}{\pi} \|\rho\|_\infty^{[-2,2]}$ et

r est bornée sur \mathbb{R}

Q 14. Commençons par le cas $\lambda = 1$. Les fonctions f et r vérifient les hypothèses de la question 7 et on a donc $\widehat{f * r} = \hat{f}\hat{r}$.

Par ailleurs, le second résultat d'inversion de Fourier donne $\rho = \hat{r}$ et \hat{r} est donc égale à 1 sur $[-1, 1]$.

Ainsi, $\hat{f}\hat{r}$ est égale à \hat{f} sur $[-1, 1]$ mais cela est aussi vrai ailleurs (où il y a nullité).

On a donc $\widehat{f * r} = \hat{f}\hat{r} = \hat{f}$ et donc $f * r = f$ par formule d'inversion de Fourier.

Pour un $\lambda > 0$ quelconque, on remarque que (changement de variable $u = \lambda t$)

$$f * r_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)r(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \frac{u}{\lambda})r(u) du = \frac{1}{\lambda}(f_{1/\lambda} * r)(\lambda x)$$

Or, $\widehat{f_{1/\lambda}}(x) = \lambda \hat{f}(\lambda x)$ est nulle en dehors du segment $[-1, 1]$, intégrable sur \mathbb{R} et $f_{1/\lambda} \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On peut donc, avec le premier cas, affirmer que $f_{1/\lambda} * r = f_{1/\lambda}$. Ainsi

$$f * r_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} f_{1/\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$$

$f = \lambda f * r_\lambda$

Q 15. La question 14 donne alors en dérivant (r et sa dérivée sont bornées) $f' = \lambda f * (r_\lambda)'$ et la question 5 indique que

$$\|f'\|_\infty \leq \lambda \|f\|_\infty \|(r_\lambda)'\|_1$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(r_\lambda)'(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda r'(\lambda x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |r'(u)| du$$

pour conclure que

$\|f'\|_\infty \leq \lambda \|f\|_\infty \|r'\|_1$