Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}$.

Q 1. Vérifier que pour tout $x \geqslant 1$, $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$.

En déduire une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t-1}}$, puis de $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2t} + \sqrt{2t-1}}$.

Q 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Q 3. La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} f(k)$ converge-t-elle ? Quelle est la limite de u_{2n} quand n tend vers $+\infty$?

Q 4. Montrer que $u_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2n}}{2}$.

Q 5. Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

Q 6. On pose $v_n = u_{n+2} - u_n$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} v_n$ converge.

En déduire l'existence d'un réel α tel que $u_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{2} + \alpha + o(1)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice hebdomadaire 5 - Corrigé

Q 1. Soit $x \geqslant 1$.

$(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) \times (\sqrt{x}+\sqrt{x-1}) = \sqrt{x}^2 - \sqrt{x-1}^2 = x-(x-1) = 1$ donc $\sqrt{x}-\sqrt{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$.

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t-1}}$ est donc la fonction $t \mapsto \dfrac{2}{3}\left(t^{3/2}-(t-1)^{3/2}\right)$.

Puis une primitive de f est $t \mapsto \dfrac{1}{3}\left((2t)^{3/2}-(2t-1)^{3/2}\right)$.

Q 2. Par récurrence sur n.

Q 3. $\sqrt{2t-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2t}$ donc (cas favorable de sommes d'équivalents : $1+1 \neq 0$) $\sqrt{2t}+\sqrt{2t-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2t}$ donc $f(t) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{2t}}$.

Donc $f(k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{2}}.\dfrac{1}{k^{1/2}}$ donc par comparaison de séries à termes positifs, comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{k^{1/2}}$ diverge, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} f(k)$ diverge aussi. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, ses sommes partielles divergent donc vers $+\infty$, donc $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Q 4. La fonction f est positive, continue et décroissante sur $[1,+\infty[$ donc on peut effectuer une comparaison série-intégrale.

Pour tout $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} f \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f$ donc en additionnant ces inégalités pour k variant de 2 à n, on obtient $\displaystyle\int_2^{n+1} f \leqslant u_{2n} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \leqslant \int_1^n f$.

Or d'après la question **Q 1**, on sait calculer ces deux intégrales : elles valent $\dfrac{1}{3}\left((2n)^{3/2}-(2n-1)^{3/2}\right)$ et $\dfrac{1}{3}\left((2n+2))^{3/2}-(2n+1)^{3/2}\right)$ à une constante additive près.

Or $\dfrac{1}{3}\left((2n)^{3/2}-(2n-1)^{3/2}\right) = \dfrac{1}{3}(2n)^{3/2}\left(1-\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{3/2}\right)$, or $1-\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{3/2} = 1-\left(1-\dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{3}{4n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{4n}$, donc $\dfrac{1}{3}\left((2n)^{3/2}-(2n-1)^{3/2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3}(2n)^{3/2} \times \dfrac{3}{4n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{2}$,

Et de même, $\dfrac{1}{3}\left((2n+2))^{3/2}-(2n+1)^{3/2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2n}}{2}$, donc les deux intégrales $\displaystyle\int_2^{n+1} f$ et $\displaystyle\int_1^n f$ sont toutes deux équivalentes à $\dfrac{\sqrt{2n}}{2}$. Donc par théorème d'encadrement, $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2n}}{2}$.

Q 5. $u_{2n+1} = u_{2n} + (-1)^{2n+1}\sqrt{2n+1} = u_{2n} - \sqrt{2n+1}$, or $u_{2n} \sim \dfrac{\sqrt{2n}}{2}$ et $\sqrt{2n+1} \sim \sqrt{2n}$ donc (cas favorable encore : $\dfrac{1}{2}-1 \neq 0$) $u_{2n+1} \sim -\dfrac{\sqrt{2n}}{2}$.

On a donc montré $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2n}}{2}$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2}$, donc $u_n \sim (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

Q 6. $v_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$: la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right)$ est décroissante, positive et converge vers 0, donc d'après le CSSA, la série $\sum v_n$ converge, donc ses sommes partielles ont une limite finie.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = u_{n+2}+u_{n+1}-u_2-u_1$ donc la suite $(u_{n+2}+u_{n+1})$ converge vers un réel 2α.

Donc $u_{n+1}+u_n = 2u_n + (-1)^{n+1}\sqrt{n+1} = 2\alpha + o(1)$, donc $u_n = (-1)^n\dfrac{\sqrt{n+1}}{2} + \alpha + o(1) = (-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{2} + \alpha + o(1)$.