Soit E un espace vectoriel de dimension $\geqslant 2$, f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$.

Q 1. Montrez que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.

Q 2. Que peut-on dire des rangs de f, $f \circ g$ et $g \circ f$?

Q 3. Montrez que $f \circ g$ est un projecteur sur $\operatorname{Im} f$, parallèlement à un sous-espace contenant $\operatorname{Ker} g$.

Q 4. On suppose désormais qu'on a aussi $g \circ f \circ g = g$. Que dire des rangs de f et g ?

Q 5. Montrez que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$.

Exercice hebdomadaire 4 - Corrigé

Q 1. $f \circ g \circ f = f$ donc $g \circ (f \circ g \circ f) = g \circ f$. Par associativité de la loi $\circ$, $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ f$. Bien sûr, $g \circ f$ est un endomorphisme de E, donc au total, $g \circ f$ est un projecteur.

De même, $f \circ g \circ f = f$ donc $(f \circ g) \circ (f \circ g) = (f \circ g \circ f) \circ g = f \circ g$, donc $f \circ g$ est aussi un projecteur.

Q 2. D'après le cours de MP2I, $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$ donc $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f \circ g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \operatorname{rg} f$, d'où l'égalité $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f \circ g)$.

Et de même, $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f \circ g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} f$, d'où l'égalité $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(g \circ f)$.

Q 3. Pour tout $x \in E$, $(f \circ g)(f(x)) = f \circ g \circ f(x) = f(x)$, donc ceci prouve que tous les vecteurs de $\operatorname{Im} f$ sont invariants par le projecteur $f \circ g$, donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(f \circ g \circ f)$.

L'inclusion réciproque est toujours vraie, donc $\operatorname{Im} f \circ g \circ f = \operatorname{Im} f$.

De plus, pour tout $x \in \operatorname{Ker} g$, $f \circ g(x) = 0$, donc $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f \circ g$.

Ceci prouve donc que $f \circ g$ est un projecteur sur $\operatorname{Im} f$, parallèlement à un sous-espace contenant $\operatorname{Ker} g$.

Q 4. De même qu'en question **Q 2**, $\operatorname{rg} g = \operatorname{rg}(g \circ f \circ g) \leqslant \operatorname{rg} f$ et $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f \circ g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} g$, donc $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$.

Q 5. D'après le th. du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Ker} g$, donc d'après ce qui précède $\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} g$.

Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$. Alors $g(x) = 0$ et il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$, donc $g \circ f(t) = 0$ donc $f \circ g \circ f(t) = f(t) = 0$, donc $x = 0$.

D'après le th. « 3 pour le prix de 2 », $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$.