Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., A, B deux s.e.v. de E supplémentaires. Soit $G = \{f \in \mathscr{L}(E) / \operatorname{Im} f = A \text{ et } \operatorname{Ker} f = B\}$.

Q 1. Montrez que G est stable par $\circ$.

Q 2. Soit e le projecteur sur A parallèlement à B. Montrez que pour tout $f \in G$, $e \circ f = f \circ e = f$.

Q 3. Montrez que pour tout $f \in G$, il existe $g \in G$ tel que $f \circ g = g \circ f = e$.

Q 4. Que pouvez-vous dire de $(G, \circ)$?

Exercice hebdomadaire 3 - Corrigé

Q 1. Soit $(f,g) \in G^2$, on veut montrer que $f \circ g \in G$.

Soit $x \in B$, alors $g(x) = 0$ donc $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} f \circ g$. Ceci prouve l'inclusion $B \subset \operatorname{Ker} f \circ g$.

Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker} f \circ g$, alors $f \circ g(x) = f(g(x)) = 0$ donc $g(x) \in \operatorname{Ker} f$, autrement dit $g(x) \in B$. Or $g(x) \in \operatorname{Im} g = A$, donc $g(x) \in A \cap B$ et comme A et B sont supplémentaires, on en déduit que $g(x) = 0$ donc que $x \in \operatorname{Ker} g = B$. Ceci prouve l'inclusion $\operatorname{Ker} f \circ g \subset B$.

Au total on a l'égalité $B = \operatorname{Ker} f \circ g$.

Soit $y \in \operatorname{Im} f \circ g$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f \circ g(x) = f(g(x))$ donc $y \in \operatorname{Im} f = A$. Ceci prouve l'inclusion $\operatorname{Im} f \circ g \subset A$.

Réciproquement, soit $y \in A = \operatorname{Im} f$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or $E = A + B$, donc il existe $(u,v) \in A \times B$ tel que $x = u + v$. Donc $y = f(u+v) = f(u) + f(v) = f(u)$ puisque $v \in B = \operatorname{Ker} f$. Puis comme $\operatorname{Im} g = A$, il existe $w \in E$ tel que $u = g(w)$, donc finalement on a $y = f(g(w)) = f \circ g(w)$ donc $y \in \operatorname{Im} f \circ g$. Ccei prouve l'incusion $A \subset \operatorname{Im} f \circ g$.

Au total on a l'égalité $A = \operatorname{Im} f \circ g$.

Finalement, on en conclut que $f \circ g \in G$.

Q 2. Soit $f \in G$.

Soit $x \in E$. Comme $E = A + B$, alors il existe $(u,v) \in A \times B$ tel que $x = u + v$. Donc $f(x) = f(u)$ et aussi $e(x) = u$ donc $f(x) = f \circ e(x)$.

De plus, $f(x) \in A$ et e est un projecteur sur A, donc $e(f(x)) = f(x)$, donc finalement $f(x) = e \circ f(x) = f \circ e(x)$.

Ceci est vrai pour tout $x \in E$, donc $f = e \circ f = f \circ e$

Q 3. Soit $f \in G$. On cherche $g \in G$ tel que $f \circ g = g \circ f = e$.

Analyse. On suppose que g existe. Alors on a les deux propriétés suivantes :
- pour tout $x \in B$, $g(x) = 0$ (puisque $B = \operatorname{Ker} g$) ;
- pour tout $x \in A$, $f(g(x)) = g(f(x)) = e(x) = x$ donc $g(x)$ doit être un antécédent dans A de x par f et vice-versa, donc g ressemble sur A à « l'inverse » de f.

Synthèse. A et B sont supplémentaires dans E donc pour définir une application linéaire de E dans E, il suffit de la définir sur A et sur B.

On considère l'application induite par f de A dans A, notée $\tilde{f}$. Il s'agit simplement de l'application $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

On sait d'après le cours que f induit un isomorphisme de tout supplémentaire du noyau dans son image (cours de Première Année). $\tilde{f}$ est donc un isomorphisme de A dans A. On va donc poser : pour $x \in A$, $g(x) = \tilde{f}^{-1}(x)$.

Et pour $x \in B$, on pose $g(x) = 0$.

Ces deux conditions définissent parfaitement une application linéaire g de E dans E. De plus, il est alors évident que $\operatorname{Ker} g = B$ et que $\operatorname{Im} g = A$. Enfin, on vérifie que g ainsi construite convient :
pour tout $x \in E$, il existe $(u,v) \in A \times B$ tel que $x = u+v$, donc $g(x) = g(u) + g(v) = g(u)$ donc $f(g(x)) = f(g(u)) = \tilde{f} \circ g(u)$ car $g(u) \in A$, donc $f(g(x)) = u = e(x)$ et de même $g(f(x)) = g(f(u)) = g \circ \tilde{f}(u) = u = e(x)$.

Donc $f \circ g = g \circ f = e$.

Q 4. La question 1 prouve que $\circ$ est une loi de composition interne dans G. La question 2 montre que e est l'élément neutre de cette loi dans G. Et la question 3 montre que tout élément de G possède un inverse dans G. Donc $(G, \circ)$ est un groupe.

Remarque : ce n'est pas en général un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$ car si $B \neq \{0\}$, alors les élements de G ne sont pas inversibles au sens habituel et $\mathrm{Id}_E \notin G$.