Q 1. Montrez que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On définit ainsi une fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ sur $]0, +\infty[$.

Q 2. Précisez la monotonie de g et sa limite en $+\infty$.

Q 3. La fonction g peut-elle être prolongée par continuité en 0 ? Sinon, quelle est sa limite en 0 ?

Q 4. Donnez un équivalent de $g(x)$ quand x tend vers 0.

Q 5. Montrez que pour tout $x > 0$, l'intégrale $h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, puis justifiez que $0 \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{g(x)}{x}$.

Q 6. À l'aide de la question précédente, montrez que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Q 7. La fonction g est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$? Si oui, calculez $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice hebdomadaire 2 - Corrigé

Q 1. Soit $x>0$. La fonction $t\mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$. De plus, pour tout $t\geqslant 1$, $0\leqslant \dfrac{e^{-t}}{t}\leqslant e^{-t}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc d'après le th. de comparaison dintégrales de fonctions positives (TCIFP), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge par relation de Chasles.

Q 2. D'après le cours, g est l'opposé de la primitive de $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}$, donc g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$, $g'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x}<0$, donc g est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, alors pour tout $x\geqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est son reste partiel et donc celui-ci tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Q 3. g est prolongeable par continuité en 0 si et s.si l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ a une limite réelle que x tend vers 0, c'est-à-dire si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Or $\dfrac{e^{-t}}{t}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge donc d'après le TCIFP, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge, donc g n'est pas prolongeable par continuité en 0.

De plus, la fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}$ est positive donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}g(x)=+\infty$.

Q 4. D'après le cours, comme $\dfrac{e^{-t}}{t}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t}$, ces deux fonctions sont positives et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_x^{1}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\underset{x\to 0}{\sim}\int_x^{1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-\ln x$.

Donc en ajoutant la constante $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$, on a encore $g(x)\underset{x\to 0}{\sim}-\ln x$.

Q 5. Même raisonnement qu'en question **Q 1** : pour tout $t\geqslant 1$, $0\leqslant\dfrac{e^{-t}}{t^2}\leqslant e^{-t}$, donc pour tout $x>0$, l'intégrale $h(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

De plus, $0\leqslant h(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}t=\frac{g(x)}{x}$.

Q 6. Par intégration par parties (qui est licite car les deux intégrales convergent) :

$$g(x)=\left[\frac{-e^{-t}}{t}\right]_{t=x}^{+\infty}-\int_x^{+\infty}(-e^{-t})\times\frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{e^{-x}}{x}-h(x)$$

Or d'après la question précédente, comme $0\leqslant h(x)\leqslant\dfrac{g(x)}{x}$, alors $h(x)=o(g(x))$ quand $x\to+\infty$, donc $g(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}+o(g(x))$ quand $x\to+\infty$ donc $g(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{e^{-x}}{x}$.

Q 7. Il a été montré que g est continue sur $]0,+\infty[$, puis que $g(x)\underset{x\to 0}{\sim}-\ln x$, or ln est intégrable sur $]0,1]$, donc g l'est aussi, et enfin que $g(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{e^{-x}}{x}$, or $x\mapsto\dfrac{e^{-x}}{x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (**Q 1**), donc g l'est aussi. Au total g est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Sous réserve de convergence, par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x=\Big[xg(x)\Big]_{x=0}^{+\infty}-\int_0^{+\infty}xg'(x)\,\mathrm{d}x$$

Or la première intégrale converge et la seconde aussi puisqu'il s'agit de $-\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\,\mathrm{d}x$, donc l'intégration par parties est licite.
Il reste à calculer le crochet de variations : d'après **Q 6**, $xg(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}e^{-x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xg(x)=0$ et d'après **Q 4**, $xg(x)\underset{x\to 0}{\sim}-x\ln x$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}xg(x)=0$.

Donc il vient : $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}xg'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,\mathrm{d}x=1$.