

Q 1. Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t^2} dt$  converge.

Q 2. Donner une primitive  $\varphi$  de  $t \mapsto \sin^2 t$ , puis montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$  diverge.

Donner un équivalent de  $\int_1^X \frac{\sin^2 t}{t} dt$  quand  $X$  tend vers  $+\infty$ .

Q 3. Montrer que la seule valeur du réel  $a$  tel que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t - a}{t} dt$  converge est  $\frac{1}{2}$ .

Q 4. Montrer que  $\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t - a}{t} dt = O\left(\frac{1}{x}\right)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Q 5. On pose  $u_n = \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t - a}{t} dt$ . Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge. Indication : faire intervenir une primitive de  $\varphi$ .

## Exercice hebdomadaire 1 - Corrigé

**Q 1.** Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [1, +\infty[$ ,  $\left| \frac{\sin(at)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$  et  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , donc par comparaison,  $t \mapsto \frac{\sin(at)}{t^2}$  est intégrable sur ce même intervalle, i.e.  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t^2} dt$  converge (absolument).

**Q 2.**  $\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$  donc une primitive de  $\varphi : t \mapsto \sin^2 t$  est  $t \mapsto \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}$ .

Soit  $X \in [1, +\infty[$ . Par intégration par parties,  $\int_1^X \frac{\sin^2 t}{t} dt = \left[ \frac{1}{t} \times \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) \right]_{t=1}^X + \int_1^X \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) \times \frac{1}{t^2} dt$ ,

donc  $\int_1^X \frac{\sin^2 t}{t} dt = \frac{\sin(2)}{4} - \frac{\sin(2X)}{4X} + \int_1^X \frac{1}{2t} dt - \frac{1}{4} \int_1^X \frac{\sin(2t)}{t^2} dt = \frac{\sin(2)}{4} - \frac{\sin(2X)}{4X} + \frac{1}{2} \ln X - \frac{1}{4} \int_1^X \frac{\sin(2t)}{t^2} dt$ .

Pour  $X \geq 1$ ,  $\left| \frac{\sin(2X)}{4X} \right| \leq \frac{1}{4X}$  donc par encadrement,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2X)}{4X} = 0$ . De plus,  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ . Et d'après la question précédente,  $\int_1^X \frac{\sin(2t)}{t^2} dt$  a une limite réelle quand  $X \rightarrow +\infty$ . Donc par opérations sur les limites,  $\int_1^X \frac{\sin^2 t}{t} dt \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Autrement dit,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$  diverge.

De plus, on observe que  $\frac{1}{2} \ln X$  est le seul terme qui a une limite infinie, les autres ayant des limites finies, donc  $\int_1^X \frac{\sin^2 t}{t} dt \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln X$ .

**Q 3.** Là encore, la question précédente donne le résultat.

En effet,  $\int_1^X \frac{\sin^2 t - \frac{1}{2}}{t} dt = \int_1^X \frac{\sin^2 t}{t} dt - \int_1^X \frac{1}{2t} dt = \int_1^X \frac{\sin^2 t}{t} dt - \frac{1}{2} \ln X = \frac{\sin(2)}{4} - \frac{\sin(2X)}{4X} - \frac{1}{4} \int_1^X \frac{\sin(2t)}{t^2} dt$ , donc  $\int_1^X \frac{\sin^2 t - \frac{1}{2}}{t} dt$  a une limite finie quand  $X \rightarrow +\infty$ . Donc  $a = \frac{1}{2}$  convient.

Cette solution est la seule, car si  $a \neq \frac{1}{2}$ , alors  $\int_1^X \frac{\sin^2 t - a}{t} dt \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \frac{1}{2} - a \right) \ln x$  (cas favorable d'addition des équivalents), donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t - a}{t} dt$  diverge dans ce cas.

**Q 4.** Dans toute la suite, on prend donc  $a = \frac{1}{2}$ .

$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t - a}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{-\cos(2t)}{2t} dt = \left[ -\frac{\sin(2t)}{4t} \right]_{t=x}^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt$  : cette intégration par parties est licite car les deux intégrales sont convergentes (et donc le crochet de variations est fini).

Donc  $\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t - a}{t} dt = \frac{\sin(2x)}{4x} - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt$ .

Or  $\left| \frac{\sin(2x)}{4x} \right| \leq \frac{1}{4x}$  et  $\left| \int_x^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \left| \frac{\sin(2t)}{4t^2} \right| dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{4t^2} dt = \frac{1}{4x}$ .

Donc  $\left| \int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t - a}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2x}$  par inégalité triangulaire.

**Q 5.** On reprend le calcul précédent en spécialisant  $x$  en  $n\pi$  :  $\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t - a}{t} dt = -\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt$ .

Avec une nouvelle intégration par parties,  $u_n = \left[ -\frac{\cos(2t)}{8t^2} \right]_{t=n\pi}^{+\infty} - \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{4t^3} dt$ , qui est là encore licite car tous les termes sont finis.

Il vient donc  $u_n = \frac{1}{8\pi^2 n^2} - \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{4t^3} dt$ , donc  $|u_n| \leq \frac{1}{8\pi^2 n^2} + \int_{n\pi}^{+\infty} \left| \frac{\cos(2t)}{4t^3} \right| dt \leq \frac{1}{8\pi^2 n^2} + \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{1}{4t^3} dt = \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ .

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge absolument.