Problème 1 - D'après E3A PC 2016

Q 1. Préliminaires : justifier la convergence des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n2^n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)2^n}$.

I. Développement en série de $\ln(1+x)$

Dans cette partie, x désigne un réel tel que $-1 < x \leqslant 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^x t^n \, \mathrm{d}t$ et $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

Q 2. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge quand $x < 1$ et que la série converge $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ même si $x = 1$.

Q 3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$.

Q 4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|s_n - \ln(1+x)| \leqslant \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1+x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Q 5. En déduire l'égalité :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

II. Séries de somme $\ln 2$ et leurs restes partiels

Q 6. Justifier les égalités :

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$, $S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$ et $T_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

L'objectif de la suite est d'obtenir un équivalent de ces trois restes partiels, afin de déterminer quelle est la meilleure série pour calculer $\ln 2$ de manière approchée.

Q 7. Montrer que $0 \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n+1} R_n$.

Q 8. Montrer que $S_n = R_n - 2R_{n+1}$ et $R_n = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} + R_{n+1}$.

Q 9. En déduire $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n2^n}$.

Q 10. Montre que $T_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} \, \mathrm{d}t$.

Q 11. En déduire $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$.

Q 12. Montrer que $S_n - 2S_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+2} S_n$. En déduire un équivalent de S_n.

Q 13. Conclure cette partie.