SÉRIES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)**

a) Montrez que la série de terme général $u_n = \arctan \dfrac{1}{2n^2}$ est convergente.

b) Montrez que pour $n \geqslant 1$, $u_n = \arctan \dfrac{n}{n+1} - \arctan \dfrac{n-1}{n}$.

c) Déduisez-en la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

***2)** Justifiez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2n-1}{n^3-n}$ converge et déterminez sa somme (indication : décomposition en éléments simples).

+3)** Donnez la nature des séries suivantes (α désigne une constante strictement positive, x un réel dans $]-1,+1[$) :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln n}$ b) $\displaystyle\sum \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$ c) $\displaystyle\sum n\alpha^n$ d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^\alpha}$

e) $\displaystyle\sum 2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$ f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$ g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ h) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n!}$ j) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n^\alpha}$ k) $\displaystyle\sum \ln(1+x^n)$ l) $\displaystyle\sum \frac{\sin n}{2^n}$

m) $\displaystyle\sum \frac{\sin n \sin \frac{1}{n}}{n}$ n) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ o) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ p) $\displaystyle\sum \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

q) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\ln n + \sin \frac{2n\pi}{3}}$ r) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)$ s) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\ln n \ln(\operatorname{ch} n)}$ t) $\displaystyle\sum \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{n^2+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

+4)** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Déterminez a et b pour que la série de terme général $\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ converge. Dans ce cas, donnez la valeur de sa somme.

b) Faites de même avec la série de terme général $\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

+5)** Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général $u_n = (\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha$ converge-t-elle ? Dans ce cas, donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

+6)** On pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{3/2}$. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle ? Dans ce cas, donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

+7)** Séries associées à des suites définies par récurrence.

a) Soit u la suite définie par récurrence par $u_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{ne^{u_n}}$. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$?

b) Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$? Puis celle de $\displaystyle\sum u_n$? Donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

c) Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 \in]0,\pi[$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right)$? Puis celle de $\displaystyle\sum u_n$? Donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

+**8)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P(x) \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{e^k + P(k)}$.

a) Justifiez l'existence de u_n.

b) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

9) On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

a) Justifiez l'existence de u_n.

b) Montrez que $\dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$ est le reste d'une série alternée absolument convergente.

c) Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

+**10)** Utilisation de dév. limités ou asymptotiques.

a) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$ converge.

b) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

c) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{1 + (-1)^n n}$ converge.

d) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ converge.

e) Nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln\left(n + (-1)^n\sqrt{n}\right)}{n}$?

f) Nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{1 + (-1)^n\sqrt{n}}$?

11) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n + n^\alpha}}$ converge-t-elle ?

+**12)** Formule de Stirling : montrez que la suite de terme général $\dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$ converge vers un réel strictement positif L (indication : passer au logarithme et penser à une série).

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$. On montre que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et que $u_{2n} = \dfrac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$. En admettant ces résultats, montrez la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

13) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^a}$.

a) Dans le cas où $a \leqslant 0$ ou $a > 1$, quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$?

b) On suppose désormais que $0 < a \leqslant 1$ et on pose $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$. Montrez que la série $\sum v_n$ converge. Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

+**14)** Soit u une suite strictement positive, $\alpha > 0$. Montrez que les séries de termes généraux u_n, $v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$, $w_n = \ln(1 + u_n)$ et $x_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{1}{1 + x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

15) Soit u une suite réelle qui ne s'annule pas telle que $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ et $\dfrac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$. Montrez que si $|ab| < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

16) Soit u une suite réelle positive décroissante. Montrez que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$. La réciproque est-elle vraie ?

+**17)** Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle strictement positive et bornée telle que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ diverge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose S_n la somme partielle d'indice n de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

a) Montrez que $\dfrac{u_n}{S_n} \sim \ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right)$. Déduisez-en la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{u_n}{S_n}$.

b) Étudiez la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ quand $\alpha \in]0,1[$.

c) Soit $\alpha > 1$. Montrez que $\displaystyle\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^\alpha}dx$. Déduisez-en la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

****18)** Soit u une suite strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

On suppose que $u_n s_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Déterminez un équivalent simple de u_n.

+****19)** Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. On pose $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln u_n$, puis $w_n = v_{n+1} - v_n$.

a) Montrez que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

b) Montrez que la suite (v_n) converge vers un réel $\ell > 0$. On pose alors $A = e^\ell > 1$.

c) Montrez que $u_n \sim A^{2^n}$.

*****20)** Transformation d'Abel.

Soit u une suite réelle et v une suite complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

On suppose que la suite u est positive et décroissante de limite nulle et la suite V est bornée.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)V_k$.

b) Déduisez-en que la série $\sum u_n v_n$ converge.

Applications :

c) Soit w une suite complexe telle que $\sum w_n$ converge. Montrez que pour tout $a > 0$, la série $\displaystyle\sum \frac{w_n}{n^a}$ converge aussi.

d) Soit $a > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donnez la nature des séries $\displaystyle\sum \frac{e^{in\theta}}{n^a}$, $\displaystyle\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^a}$ et $\displaystyle\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^a}$.

e) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \geqslant \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Déterminez la nature des séries $\displaystyle\sum \frac{|\cos(n\theta)|}{n^a}$ et $\displaystyle\sum \frac{|\sin(n\theta)|}{n^a}$.

*****21)** Soit u une suite positive de limite nulle. On appelle U_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ et on suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - nu_n| \leqslant M$.

a) Montrez que pour tout $n \geqslant 2$, $\left|\dfrac{U_n}{n} - \dfrac{U_{n-1}}{n-1}\right| \leqslant M\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)$

b) Montrez que la série $\sum u_n$ converge.

*****22)** Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ une série convergente à termes positifs.

a) Montrez que $\dfrac{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n}{n(n+1)}$ converge et montrez que sa somme est la même que celle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

FAMILLES SOMMABLES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

+23)** La famille $\left(\dfrac{1}{pq(p+q)}\right)_{p,q\geqslant 1}$ est-elle sommable ?

+24)** Pour quelles valeurs de α la famille $((p+q)^{\alpha})_{p,q\geqslant 1}$ est-elle sommable ?

****25)** Soit $a>1$. Montrez que la famille $\left(\dfrac{1}{a^p+a^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et justifiez que sa somme est inférieure ou égale à $\dfrac{a}{2(\sqrt{a}-1)^2}$. *Indication : remarquer que pour tout* $(x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2}$, $2xy\leqslant x^2+y^2$.

+26)**

a) Soit $\alpha>0$. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^{\alpha}}{2^n}$ est convergente. On note $S(\alpha)$ sa somme.

b) En effectuant le changement d'indice $m=n-1$, donnez la valeur de $S(1)$.

c) En vous inspirant de ce qui précède, donnez une expression de $S(2)$ en fonction de $S(1)$ et $S(0)$, puis sa valeur.

d) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^{m+n}m}{2^{m+n}}\right)_{m,n\geqslant 0}$ est sommable et calculez sa somme.

+27)** Soit a un complexe tel que $|a|<1$. En utilisant un produit de Cauchy, montrez que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n=\left(\frac{1}{1-a}\right)^2$.

+28)**

a) Pour $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$ et $N\in\mathbb{N}$, que vaut $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty}z^n$?

b) Soit $x\in\mathbb{C}$ tel que $|x|<1$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{1-x^{2p+1}}$.

+29)** Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$. On rappelle que $H_n=\ln n+\gamma+o(1)$.

a) Soit $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$. Exprimez $\displaystyle\sum_{n=a}^{+\infty}\frac{1}{n(n+b)}$ en fonction de termes de la suite H.

b) Soit $m\in\mathbb{N}^*$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+m)}\underset{m\to+\infty}{\sim}\frac{\ln m}{m}$.

c) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{m(m+n^2)}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable.

d) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{m(m+n)(m+2n)}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable.

****30)** Pour $n\geqslant 2$, on pose $P(n)$ le plus grand diviseur premier de n. On note $p_1=2, p_2=3,\dots$ la suite croissante des nombres premiers.

a) Montrez que pour tout $k\geqslant 3$, $p_{k-1}\leqslant p_k-2$, puis $\dfrac{p_k}{p_k-1}\leqslant\sqrt{\dfrac{p_k}{p_{k-1}}}$.

b) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{nP(n)}$ converge (indication : penser à une sommation par paquets).

****31)** Soit u une suite complexe.

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $H_x=\{z\in\mathbb{C}\ /\ \mathrm{Re}(z)>x\}$, son adhérence est $\overline{H_x}=\{z\in\mathbb{C}\ /\ \mathrm{Re}(z)\geqslant x\}$.

a) Montrez que s'il existe $s_0\in\mathbb{C}$ tel que la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^{s_0}}\right)_{n\geqslant 1}$ est sommable, alors pour tout $s\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(s_0)$, la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^{s}}\right)_{n\geqslant 1}$ est sommable.

b) Quand la famille $\left(\dfrac{u_n}{n^{s}}\right)_{n\geqslant 1}$ est sommable, on pose $f_u(s)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{u_n}{n^s}$.

Montrez que l'ensemble de définition de f_u est, s'il est non vide, $\mathbb{C}$ ou un ensemble H_x ou un ensemble $\overline{H_x}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \{(d, d') \in \mathbb{N}^{*2} \ / \ dd' = n\}$. Montrez que $\mathbb{N}^{*2} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$.

d) Soit $(a_n), (b_n)$ deux suites complexes et $s \in \mathbb{C}$ telles que les familles $\left(\dfrac{a_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ et $\left(\dfrac{b_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ soient sommables.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}$. Montrez que la famille $\left(\dfrac{c_n}{n^s}\right)_{n \geqslant 1}$ est sommable et que $f_c(s) = f_a(s) \times f_b(s)$.

****32)** Cet exercice prolonge le précédent.

On rappelle la définition de l'indicatrice d'Euler : pour $n \in \mathbb{N}^*$, ϕ_n est le cardinal de $\{k \in [\![1, n]\!] \ / \ k \wedge n = 1\}$.

On définit par récurrence la suite de Möbius : $\mu_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $\mu_n = -\sum_{\substack{d|n \\ d<n}} \mu_d$.

Enfin, on note δ_n le nombre de diviseurs de n, σ_n la somme des diviseurs de n.

On pose $\zeta = f_1$, $\xi = f_\phi$ et $M = f_\mu$.

a) Montrez que l'ensemble de définition (au sens précédent) de ζ est H_1. Montrez que ξ est définie sur H_2.

b) On admet la relation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{d|n} \phi_d$. Donnez une relation valable sur H_2 liant les fonctions ξ et ζ. Justifiez alors que l'ensemble de définition de ξ est H_2.

c) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mu_n| \leqslant 1$. Donnez une relation entre M et ζ, précisez l'ensemble de définition de M.

d) Déduisez-en la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\phi_n}{n} = \sum_{d|n} \dfrac{\mu_d}{d}$, en admettant l'unicité des coefficients u_n d'une fonction f_u.

e) Exprimez f_δ et f_σ en fonction de ζ, précisez les ensembles de définition.

Oraux de concours

1) Saint-Cyr Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Déterminez la nature de la série $\sum u_n$. Donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ quand $n \to +\infty$.

2) IMT Soit $\alpha > 0$. Donnez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^\alpha$ quand $n \to +\infty$.

3) CCINP Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

a) Montrez que (u_n) converge et déterminez sa limite.

b) Déterminez la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. Déduisez-en un équivalent de u_n.

4) CCINP Montrez que pour $n \geqslant 1$, l'équation $x^n + \sqrt{n}x - 1 = 0$ admet une unique racine x_n dans $[0, 1]$. Étudiez la suite (x_n) et montrez qu'elle converge vers 0. Trouvez un équivalent de x_n et étudiez la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} x_n$.

5) CCINP Montrez que la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0, 1[$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + u_n^2)$ converge vers 0 et donnez la nature de la série $\sum u_n$.

6) CCINP Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$?

7) CCINP Soit $x, y > 0$. Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) tels que la série $\displaystyle\sum \frac{x^n}{y^n + n^x}$ converge.

8) CCMP Étudiez la convergence de la suite (a_n) définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$. Nature des séries $\sum (-1)^n a_n$ et $\sum a_n^2$. Nature de $\sum a_n$ (on pourra étudier $\sum \ln \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$).

9) CCINP Soit (a_n) une suite positive et (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.

b) Montrez que si la série $\sum a_n$ converge, alors la suite (u_n) converge.

c) La réciproque est-elle vraie ? Indication : considérer $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

10) IMT Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+3} u_n$. On pose $(v_n) = (n^2 u_n)$.

a) Déterminez la nature de la série de terme général $\ln \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

b) Déduisez-en la nature de la série de terme général u_n.

11) CEN Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ converge et donnez la valeur de sa somme. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{n^2}{(n^2+1)^2}$ converge et donnez une valeur de n pour que sa somme partielle soit une valeur approchée de sa somme à 10^{-4} près.

12) CEN

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez que la suite $(H_n - \ln n)_{n \geqslant 1}$ converge.

b) Déduisez de la question précédente la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

c) Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Calculez $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n}$.

13) CEN Si (u_n) est une suite réelle telle que $u_0 = 0$, on pose alors $(v_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n(u_n - u_{n-1})$.

On note P_1 la propriété « la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} v_n$ converge ».

On note P_2 la propriété « il existe ℓ tel que $u_n \to \ell$ et $\sum (\ell - u_n)$ converge ».

a) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \arctan(n^\alpha)$ pour $n \geqslant 1$, étudiez la véracité des propositions P_1 et P_2.

b) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle que $\sum a_n$ converge. Montrez que $\sum \frac{a_n}{n}$ converge et que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) Comparez les propriétés P_1 et P_2.

14) CCMP Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \{1/2\}$. La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^\alpha}$ converge-t-elle ?

15) CCMP Soit $\alpha > 0$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

a) On suppose $\alpha > 1$. Montrez que $\sum_{k=1}^{n} R_k = (n+1)R_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^{\alpha-1}}$. Déduisez-en la convergence de la série $\sum R_n$.

b) Étudiez le cas $\alpha \leqslant 1$.

16) CCMP Soit $(a_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}^*}$.

a) On suppose que la série $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge. Montrez que la série $\sum a_n$ converge.

b) On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrez que la série $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.
Vous introduirez, pour $\lambda > 1$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \ / \ a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \lambda a_n\}$ et son complémentaire.

c) Généralisez en remplaçant $a_n^{1-\frac{1}{n}}$ par $a_n^{1-b_n}$ avec une hypothèse adéquate sur la suite (b_n).

17) CCMP Soit f une permutation de $\mathbb{N}^*$. On pose $E(f) = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \ / \ \sum \frac{f(n)}{n^\alpha} \text{ converge}\right\}$.

a) Montrez que $E(f)$ peut être vide. Montrez dans le cas contraire que $E(f)$ est un intervalle minoré par 2 et non majoré.

b) Soit $B \geqslant 2$. Montrez l'existence de f telle que $E(f) =]B, +\infty[$.

18) X Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

a) Montrez que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note ℓ sa limite.

b) Montrez que $\ell = -(1+\sqrt{2}) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.

19) X Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente de réels.

a) Montrez que pour tout réel $p \geqslant 1$, la série $\sum |x_n|^p$ converge.

b) Déterminez la limite quand $p \to +\infty$, de $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p$.

20) X Soit $\alpha > 0$ et (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Étudiez la convergence de la série $\sum u_n$.