Problème 1 - Équivalent du reste partiel de certaines séries alternées

Dans ce problème, f désigne une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même et λ un réel au moins égal à 1 tels que
(1) pour tout $x > 0$, $f(x) + \lambda f(x+2) \geqslant (1+\lambda)f(x+1)$
(2) pour tout $x > 0$, $\lambda f(x+1) \leqslant f(x)$
(3) quand $x \to +\infty$, $f(x) \sim \lambda f(x+1)$.
(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

On pose $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Cas général

Q 1. Justifier la bonne définition de $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 2. Montrer que si $\lambda = 1$, alors la condition (1) est satisfaite si on suppose f convexe. Montrer que si $\lambda > 1$, la condition (4) est superflue.

Q 3. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^k (u_k - \lambda u_{k+1})$ converge.

Q 4. Vérifier que pour tout $n \in N^*$, $R_n + \lambda R_{n+1} = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} (-1)^k (u_k - \lambda u_{k+1})$ puis que $|R_n + \lambda R_{n+1}| \leqslant u_n - \lambda u_{n+1}$.

Q 5. En exprimant R_{n+1} en fonction de R_n, montrer que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n \dfrac{\lambda}{1+\lambda} u_n$.

II. Applications

Dans les questions qui suivent, α est un réel strictement positif.

Q 6. Montrer que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2n^\alpha}$.

Q 7. Montrer que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k2^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n \dfrac{2}{3n2^n}$.

Q 8. Soit $\lambda \geqslant 1$.

a) On pose $\varphi : x \mapsto \lambda \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^\alpha + \left(1 - \dfrac{1}{x+2}\right)^\alpha - (1+\lambda)$. Montrer que φ est décroissante sur $]0, +\infty[$, puis qu'elle est positive.

b) Montrer que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^\alpha \lambda^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n \dfrac{\lambda}{(1+\lambda)n^\alpha \lambda^n}$.

Problème 2 - D'après BECEAS 2018

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. On rappelle qu'un nombre entier naturel, au moins égal à 2, est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et lui même (donc 1 n'est pas premier).

On note $\mathscr{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle aussi que tout entier naturel n, au moins égal à 2, se décompose, de façon unique à l'ordre des facteurs près, comme produit de nombres premiers c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $(p_1, \dots, p_r) \in \mathscr{P}^r$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$$

Si a et b sont deux entiers naturels tels que $a \leqslant b$, la notation $\sum\limits_{\substack{a\leqslant p\leqslant b\\ p\in\mathscr{P}}} \alpha_p$ désigne la somme des nombres α_p pour tous les entiers **premiers** p de l'intervalle entier $[\![a, b]\!]$. On définit de la même façon $\sum\limits_{\substack{p\leqslant b\\ p\in\mathscr{P}}} \alpha_p$, $\prod\limits_{\substack{p\leqslant b\\ p\in\mathscr{P}}} \alpha_p$ etc.

Par exemple, $\sum\limits_{\substack{4\leqslant p\leqslant 10\\ p\in\mathscr{P}}} \alpha_p = \alpha_5+\alpha_7$ ou $\prod\limits_{\substack{p\leqslant 8\\ p\in\mathscr{P}}} \alpha_p = \alpha_2\times\alpha_3\times\alpha_5\times\alpha_7$.

I. Préliminaires

On établit, dans cette partie, quelques résultats préeliminaires, indépendants les uns des autres, qui seront utilisés par la suite.

Q 1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction continue, décroissante et positive de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} f(k)$.

a) Montrer que la suite de terme général $\gamma_n = S_n - \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ est monotone et convergente.

b) En déduire l'existence d'un réel, noté C, pour lequel on a, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1)$$

c) Montrer la convergence de la série $\sum \frac{1}{k\ln^2(k)}$.

Q 2. Montrer que la série de terme général $\frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ est convergente. *On note* $K = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ *sa somme.*

Q 3. Montrer $\ln(n!) = n\ln(n) + O(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Q 4.

a) Soit λ un réel strictement positif. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence et l'unicité d'un réel $x > 0$ tel que $x\ln(x) - \lambda x = \ln(n)$. On note r_n cet unique réel.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$ puis établir l'équivalence $r_n \sim \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$.

Q 5.

a) Justifier, pour tout entier naturel m non nul, l'inégalité : $2\binom{2m+1}{m} \leqslant 2^{2m+1}$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, l'entier $\prod\limits_{\substack{r+1<p\leqslant 2r+1\\ p\in\mathscr{P}}} p$ divise l'entier $\binom{2r+1}{r}$ (le produit s'effectuant donc sur tous les entiers **premiers** de $[\![r+2, 2r+1]\!]$).

c) Etablir, pour tout entier n au moins égal à 2, l'inégalité $\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} p \leqslant 4^n$ (le produit s'effectuant donc sur tous les entiers **premiers** au plus égaux à n).

On raisonnera par récurrence forte et, ayant supposé l'inégalité vraie jusqu'au rang n, *on examinera, en particulier, le cas où* $n+1$ *est un entier premier égal à* $2r+1$.

On en déduit ainsi l'inégalité $\sum\limits_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \ln(p) \leqslant n\ln(4)$.

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour tout nombre premier p et tout entier $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$, $v_p(r)$ l'exposant de p dans la décomposition en nombres premiers de r, et on pose $v_p(1) = 0$. Par exemple, puisque $300 = 2^2\times3\times5^2$, $v_2(300) = 2$, $v_3(300) = 1$, $v_5(300) = 2$ et $v_p(300) = 1$ pour $p \notin \{2, 3, 5\}$.

Soit p un nombre premier. On note, pour tout entier naturel k non nul, α_k (rep. β_k) le nombre d'entiers $d \in [\![1, n]\!]$ tels que p^k divise d (resp. tel que $v_p(d) = k$). *Bien sûr, dès que* k *est assez grand,* $\alpha_k = \beta_k = 0$.

a) Prouver, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'égalité $\alpha_k = \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$.

b) Justifier l'égalité $v_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\beta_k$.

c) En déduire, en reliant β_k aux α_i, l'égalité $v_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$.

d) En déduire l'encadrement : $\frac{n}{p} - 1 \leqslant v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p-1} (= \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)})$.

Q 7. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Prouver, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_n A_n$$

II. Deux résultats asymptotiques

Q 8.

a) Etablir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\ln(n!) = \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in\mathscr{P}}} v_p(n!) \ln(p)$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement :

$$\frac{\ln(n!)}{n} - K \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln(p)}{p} \leqslant \frac{\ln(n!)}{n} + \ln(4)$$

où le réel K est défini dans la question **I**.2).

c) Conclure, quand l'entier n tend vers $+\infty$, à l'évaluation asymptotique

$$\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in\mathscr{P}}} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)$$

Q 9. On note χ l'application qui, à chaque entier $k \in \mathbb{N}^*$, associe 1 si k est premier (i.e. $k \in \mathscr{P}$) et 0 sinon.

a) En posant, pour tout entier naturel k non nul, $a_k = \chi(k)\dfrac{\ln(k)}{k}$, $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$, en utilisant **I**.7), établir, pour tout $n \geqslant 2$, l'égalité :

$$\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k + \frac{A_n}{\ln(n)}$$

b) Etablir, quand l'entier k tend vers $+\infty$, l'égalité :

$$\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)} A_k = \frac{1}{k\ln(k)} + O(\frac{1}{k\ln^2(k)})$$

c) En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'égalité :

$$\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + O(1)$$

Problème 1

I.

Q 1. D'après l'hypothèse (2), comme $\lambda \geqslant 1$ et $f(x+1) > 0$, on a : pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x+1) \leqslant \lambda f(x+1) \leqslant f(x)$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+1) = u_{n+1} \leqslant f(n) = u_n$: la suite (u_n) est décroissante (et positive par hypothèse).

De plus, grâce à l'hypothèse (4), elle converge vers 0 (par caractérisation séquentielle de la limite). Donc d'après le critère spécial des séries alternées (CCSA), la série $\sum(-1)^n u_n$ converge, donc R_n est bien défini.

Q 2. Si f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et $t \in [0,1]$, $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$. On spécialise $t \leftarrow \dfrac{1}{2}$ et $y \leftarrow x+2$, on obtient $x+1 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}(x+2)$ donc $f(x+1) \leqslant \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2}f(x+2)$, c'est-à-dire $f(x)+f(x+2) \geqslant 2f(x+1)$: si $\lambda = 1$, alors la condition (1) est satisfaite si on suppose f convexe.

Supposons maintenant $\lambda > 1$.

Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après l'hypothèse (2), comme $\lambda > 1$ et $f(x+n+1) > 0$, on a $f(x+n+1) \leqslant \lambda f(x+n+1) \leqslant f(x+n)$. La suite $(f(x+n))$ est décroissante (et positive par hypothèse), donc elle converge (th. de la limite monotone). On note ℓ sa limite, $\ell \geqslant 0$. Alors en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $\ell \leqslant \lambda\ell \leqslant \ell$, donc $\ell = \lambda\ell$, or $\lambda \neq 1$, donc $\ell = 0$.

On a donc montré : pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n) = 0$. Et c'est tout ce qu'on peut dire, car cette proposition n'est pas équivalente à $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Il y a une erreur d'énoncé, sans doute que l'hypothèse (4) est plutôt $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ (où n est un entier), ce qui suffit pour la question **Q 1** en tout cas.

Q 3. On pose $v_k = u_k - \lambda u_{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. L'hypothèse (2) permet d'affirmer que la suite (v_k) est positive. Et l'hypothèse (4) corrigée donne $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k = 0$.

Enfin, $v_{k+1} \leqslant v_k \iff f(k+1) - \lambda f(k+2) \leqslant f(k) - \lambda f(k+1) \iff (1+\lambda)f(k+1) \leqslant f(k) + \lambda f(k+2)$ et ceci est vrai d'après l'hypothèse (1) : la suite (v_k) est décroissante.

D'après le CSSA, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^k(u_k - \lambda u_{k+1})$ converge.

Q 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} R_n + \lambda R_{n+1} &= \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k + \lambda \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k + \lambda \sum_{j=n}^{+\infty}(-1)^{j+1}u_{j+1} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty}\left((-1)^k u_k + \lambda(-1)^{k+1}u_{k+1}\right) = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k(u_k - \lambda u_{k+1}) \end{aligned}$$

D'après la question précédente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^k(u_k - \lambda u_{k+1})$ vérifie les hypothèses du CSSA, donc en particulier son reste partiel en valeur absolue est inférieur ou éagl à son premier terme : $|R_n + \lambda R_{n+1}| \leqslant u_n - \lambda u_{n+1}$.

Q 5. $R_n = (-1)^n u_n + R_{n+1}$ donc l'inégalité précédente donne : $|(1+\lambda)R_n - \lambda(-1)^n u_n| \leqslant u_n - \lambda u_{n+1}$, donc en divisant par $|(-1)^n u_n| = u_n > 0$, on obtient

$\left|(1+\lambda)\dfrac{R_n}{(-1)^n u_n} - \lambda\right| \leqslant 1 - \lambda\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Or d'après l'hypothèse (3), $1 - \lambda\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par encadrement, $(1+\lambda)\dfrac{R_n}{(-1)^n u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \neq 0$ donc $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n \dfrac{\lambda}{1+\lambda}u_n$.

II.

Q 6. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Elle est convexe sur $]0,+\infty[$ car sa dérivée seconde $t \mapsto \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}$ est positive, donc d'après la question **Q 2**, elle vérifie l'hypothèse (1) en prenant $\lambda = 1$. Toujours avec $\lambda = 1$, sa décroissance assure l'hypothèse (2). L'hypothèse (3) est clairement satisfaite et la (4) aussi.

On peut donc appliquer ce qui précède : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n^\alpha}$, car $\dfrac{\lambda}{1+\lambda} = \dfrac{1}{2}$ quand $\lambda = 1$.

Q 7. On pose $f : t \mapsto \dfrac{1}{t2^t}$, définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Quand $x \to +\infty$, $2f(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)2^x} \sim f(x)$: on est dans le cas $\lambda = 2$ et l'hypothèse (3) est satisfaite. On vérifie les autres : la (4) l'est aussi sans difficulté, la (2) aussi car $2f(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)2^x} \leqslant \dfrac{1}{x2^x} = f(x)$. Il reste la (1), ce qui nécessite un peu de travail :

$f(x) + \lambda f(x+2) \geqslant (1+\lambda)f(x+1) \iff \dfrac{1}{x2^x} + 2\dfrac{1}{(x+2)2^{x+2}} \geqslant 3\dfrac{1}{(x+1)2^{x+1}} \iff \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+2} \geqslant \dfrac{3}{x+1}$

$\iff \dfrac{3x+4}{x(x+2)} \geqslant \dfrac{3}{x+1} \iff (3x+4)(x+1) \geqslant 3x(x+2) \iff 3x^2+7x+4 \geqslant 3x^2+6x \iff x+4 \geqslant 0$, ce qui est vrai, donc l'hypothèse (1) est satisfaite aussi.

D'après la partie 1, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k2^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n \frac{2}{3}\frac{1}{n2^n}$.

Q 8.

a) φ est dérivable sur $]0,+\infty$ et après quelques calculs que je ne détaille pas, pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \alpha\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\alpha-1}\left(\left(\frac{x}{x+2}\right)^{\alpha+1} - \lambda\right)$$

Comme $0 < \dfrac{x}{x+2} < 1$ et $\alpha + 1 > 0$, on a donc $\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{\alpha+1} \leqslant 1 \leqslant \lambda$, donc $\varphi'(x) \geqslant 0$.

La fonction φ est donc décroissante sur $]0,+\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est clairement 0, donc elle est positive sur $]0,+\infty[$.

b) On pose $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha \lambda^t}$, définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Quand $x \to +\infty$, $\lambda f(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^\alpha \lambda^x} \sim f(x)$: l'hypothèse (3) est satisfaite. On vérifie les autres : la (4) l'est aussi sans difficulté, la (2) aussi car $\lambda f(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^\alpha\lambda^x} \leqslant \dfrac{1}{x\lambda^x} = f(x)$. Il reste la (1), ce qui nécessite aussi un peu de travail :

$$\begin{aligned}
f(x) + \lambda f(x+2) \geqslant (1+\lambda)f(x+1) &\iff \frac{1}{x^\alpha\lambda^x} + \lambda\frac{1}{(x+2)^\alpha\lambda^{x+2}} \geqslant (1+\lambda)\frac{1}{(x+1)^\alpha\lambda^{x+1}} \\
&\iff \frac{\lambda}{x^\alpha} + \frac{1}{(x+2)^\alpha} \geqslant \frac{\lambda+1}{(x+1)^\alpha} \\
&\iff \frac{\lambda(x+1)^\alpha}{x^\alpha} + \frac{(x+1)^\alpha}{(x+2)^\alpha} \geqslant \lambda + 1 \\
&\iff \lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)^\alpha + \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^\alpha \geqslant \lambda+1 \\
&\iff \varphi(x) \geqslant 0
\end{aligned}$$

ce qui est vrai, donc l'hypothèse (1) est satisfaite aussi.

D'après la partie 1, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha\lambda^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{1}{n^\alpha\lambda^n}$.

Problème 2

I.

Q 1.

a) Soit $n \geqslant n_0$. On a avec Chasles : $\gamma_{n+1} - \gamma_n = f(n+1) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t))\,\mathrm{d}t$.

Commme f est décroissante, on a $\forall t \in [n, n+1],\ f(n+1) - f(t) \leqslant 0$, d'où $\gamma_{n+1} - \gamma_n \leqslant 0$.

D'autre part, toujours selon Chasles, on a

$$\gamma_n = f(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right) = f(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_k^{k+1} (f(k) - f(t))\ \mathrm{d}t$$

Comme pour $k \geqslant n_0$, on a $\forall t \in [k, k+1],\ f(k) - f(t) \geqslant 0$, alors $\gamma_n \geqslant f(n) \geqslant 0$.

Ainsi la suite la suite (γ_n) est décroissante et minorée par 0, d'où $\boxed{\text{la suite } (\gamma_n)_{n \geqslant n_0} \text{ est monotone et convergente}}$.

b) On applique ce qui précède à la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ qui est bien continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$.

Donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \right)_{n \geqslant 2} = \left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \ln(\ln(n)) + \ln(\ln(2)) \right)_{n \geqslant 2}$ est convergente de limite que je note $\ell \in \mathbb{R}$.

Donc lorsque n tend vers $+\infty$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ell + \ln(\ln(2)) + o(1)$

d'où $\boxed{\text{l'existence d'un réel } C = \ell + \ln(\ln(2)), \text{ tel que } \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = \ln(\ln(n)) + C + o(1) \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty}$.

c) Soit $A > 0$. On a $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{\ln(t)} \right]_{t=2}^{t=A} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)}$ d'où $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{\ln(2)}$.

Comme en (b), on applique (a) à la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^2}$ qui est bien continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, ce qui nous fournit $L \in \mathbb{R}$, limite de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \int_2^n \frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t \right)_{n \geqslant 2}$ et on a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = L + \int_2^n \frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t + o(1) = L + \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} + o(1) \xrightarrow{n \to +\infty} L + \frac{1}{\ln(2)}$$

On en déduit $\boxed{\text{la convergence de la série } \sum \dfrac{1}{k\ln^2(k)}}$ d'après celle de la suite de ses sommes partielles.

Q 2. Pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{\ln k}{k(k-1)} \geqslant 0$ et $\dfrac{\ln k}{k(k-1)} \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln k}{k^2} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k^{3/2}} \right)$ (car $\ln x \underset{x \to +\infty}{=} o(\sqrt{x})$).

Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} \frac{\ln k}{k(k-1)}$ converge.

Q 3. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$. On a par croissance de ln sur $[k-1, k]$, $\ln(k-1) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(k)$,

donc en utilisant Chasles : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leqslant \int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = n\ln(n) - (n-1) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$. (Rem : une primitive de ln est $t \mapsto t\ln t - t$).

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On a $\ln(n!) = \ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k \right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

Ainsi comme $\ln(1) = 0$, on a $\ln((n-1)!) \leqslant n\ln(n) - n + 1 \leqslant \ln(n!)$,

donc $-n + 1 \leqslant \ln(n!) - n\ln n \leqslant \ln n - n + 1$. Or $-n + 1 = O(n)$ et $\ln n - n + 1 = O(n)$,

donc par encadrement, on en déduit $\boxed{\ln(n!) = n\ln(n) + O(n), \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty}$

Q 4.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note φ_n la fonction $x \longmapsto x\ln(x) - \lambda x - \ln(n)$ définie sur $]0, +\infty[$.

φ_n est de classe C^1 et $\varphi_n' : x \longmapsto \ln(x) + 1 - \lambda$. La fonction φ_n' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Je note $a = \mathrm{e}^{\lambda-1}$ de sorte que $a > 0$ et $\varphi_n'(a) = 0$, donc par étude de signe, φ_n est strictement décroissante sur $]0, a]$ et strictement croissante sur $[a, +\infty[$.

Comme par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi_n(x) = -\ln(n) \leqslant 0$, on a $\forall x \in]0, a]$, $\varphi_n(x) < -\ln(n) \leqslant 0$ donc φ_n ne s'annule pas sur $]0, a]$.

Par ailleurs φ_n est continue et strictement croissante sur $[a, +\infty[$, de plus $\varphi_n(a) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x) - \lambda) = +\infty > 0$, donc d'après le th de la valeur intermédiaire, il existe un unique $x \in [a, +\infty[$, tel que $\varphi_n(x) = 0$.

On a justifié $\boxed{\text{l'existence et l'unicité d'un réel } x > 0 \text{ tel que } x\ln(x) - \lambda x = \ln(n)}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $\varphi_1(r_n) = \ln(n)$. Comme φ_1 est strictement croissante sur $[a, +\infty[$ et que $r_n > a$ et $r_{n+1} > a$, on a $\varphi_1(r_n) = \ln(n) < \ln(n+1) = \varphi_1(r_{n+1})$ alors $r_n < r_{n+1}$.

Donc (r_n) est croissante donc la suite (r_n) admet une limite dans $[a, +\infty]$.

Par l'absurde si on avait $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \ell \in [a, +\infty[$

alors par continuité de φ_1, on aurait $\varphi_1(\ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_1(r_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$: absurde

On a bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty}$

Quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $r_n(\ln(r_n) - \lambda) = \ln(n)$, donc $\ln(r_n) + \ln(\ln(r_n) - \lambda) = \ln(\ln(n))$

ce qui est légal car pour n assez grand on a $\ln(r_n) - \lambda > 0$ car $\ln(r_n) \longrightarrow +\infty$

de plus $\ln(\ln(r_n) - \lambda) = \ln(\ln(r_n)) + \ln\left(\dfrac{\ln(r_n) - \lambda}{\ln(r_n)}\right)$,

comme $\ln(r_n) \longmapsto +\infty$, on a $\dfrac{\ln(r_n) - \lambda}{\ln(r_n)} \longrightarrow 1$ donc $\ln\left(\dfrac{\ln(r_n) - \lambda}{\ln(r_n)}\right) \longrightarrow 0$,

d'où $\ln(\ln(r_n) - \lambda) \sim \ln(\ln(r_n)) = O(\ln(r_n))$ par croissance comparée

donc $\ln(\ln(n)) \sim \ln(r_n)$ d'où $\ln(r_n) - \lambda \sim \ln(\ln(n))$, ainsi par produit : $r_n \ln(\ln(n)) \sim \ln(n)$

d'où $\boxed{\text{l'équivalence } r_n \sim \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))} \text{ quand } n \longrightarrow +\infty}$

Q 5.

a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a $2^{2m+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k}$ selon le cours

donc $2^{2m+1} \geqslant \dbinom{2m+1}{m} + \dbinom{2m+1}{m+1}$ car les termes sont tous positifs

de plus $\dbinom{2m+1}{m+1} = \dbinom{2m+1}{2m+1-2m-1} = \dbinom{2m+1}{m}$ d'où on a bien $\boxed{\text{l'inégalité : } 2\dbinom{2m+1}{m} \leqslant 2^{2m+1}}$

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![r+2, 2r+1]\!] \cap \mathscr{P}$.

On a $\dbinom{2r+1}{r} = \dfrac{(2r+1)!}{r!\,(r+1)!} \in \mathbb{N}^*$. donc $r!\,(r+1)!\dbinom{2r+1}{r} = (2r+1)!$

On a $(r+1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times r \times (r+1)$

Comme $p \geqslant r+1$, p n'apparaît dans aucun des facteurs premiers des entiers entre 1 et $r+1$ donc le nombre premier p n'apparaît pas dans la décomposition en facteurs premiers de $r!\,(r+1)!$, donc p est premier avec $r!\,(r+1)!$, mais $p \mid (2r+1)!$ car $2 \leqslant p \leqslant 2r+1$

alors selon le théorème de Gauss, on a $p \mid \dbinom{2r+1}{r}$.

Ainsi les nombres premiers entre $r+2$ et $2r+1$ sont tous des diviseurs de $\dbinom{2r+1}{r}$, donc comme ils sont premiers entre eux deux à deux,

$\boxed{\text{l'entier } \displaystyle\prod_{\substack{r+1<p\leqslant 2r+1 \\ p\in\mathscr{P}}} p \text{ divise l'entier } \dbinom{2r+1}{r}}$

c) On va procéder par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 2$, on a $\prod_{\substack{p \leqslant 2 \\ p \in \mathscr{P}}} p = 2 \leqslant 16 = 4^n$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. on suppose que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a $\prod_{\substack{p \leqslant k \\ p \in \mathscr{P}}} p \leqslant 4^k$. On veut montrer $\prod_{\substack{p \leqslant n+1 \\ p \in \mathscr{P}}} p \leqslant 4^{n+1}$.

Premier cas : $n+1$ n'est pas un nombre premier, donc $\prod_{\substack{p \leqslant n+1 \\ p \in \mathscr{P}}} p = \prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathscr{P}}} p \leqslant 4^n \leqslant 4^{n+1}$

Deuxième cas : si $n+1$ est un nombre premier, alors $n+1$ est impair car $n+1 \geqslant 3$,

on peut alors écrire $n+1 = 2r+1$, où $r \in \mathbb{N}^*$ et on a :

$$\prod_{\substack{p \leqslant n+1 \\ p \in \mathscr{P}}} p = \left(\prod_{\substack{p \leqslant r+1 \\ p \in \mathscr{P}}} p\right)\left(\prod_{\substack{r+1 < p \leqslant 2r+1 \\ p \in \mathscr{P}}} p\right)$$

On a d'après (b) : $\left(\prod_{\substack{r+1 < p \leqslant 2r+1 \\ p \in \mathscr{P}}} p\right)$ divise $\binom{2r+1}{r}$, donc $\prod_{\substack{r+1 < p \leqslant 2r+1 \\ p \in \mathscr{P}}} p \leqslant \binom{2r+1}{r}$

donc d'après (a), on a $\prod_{\substack{r+1 < p \leqslant 2r+1 \\ p \in \mathscr{P}}} p \leqslant \dfrac{2^{2r+1}}{2} = 4^r$

Par hypothèse de récurrence, on a : $\prod_{\substack{p \leqslant r+1 \\ p \in \mathscr{P}}} p \leqslant 4^{r+1}$ car $2 \leqslant r+1 \leqslant n$

Comme tous les facteurs sont positifs, on a

$$\prod_{\substack{p \leqslant n+1 \\ p \in \mathscr{P}}} p \leqslant 4^r \times 4^{r+1} = 4^{2r+1} = 4^{n+1}$$

D'où le résultat (dans tous les cas)

Conclusion : On a montré par récurrence forte que

$\boxed{\text{pour tout entier } n \text{ au moins égal à 2, l'inégalité } \prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathscr{P}}} p \leqslant 4^n}$

Q 6.

a) On a $\{d \in [\![1, n]\!] \ / \ p^k \mid d\} = \{tp^k \ / \ t \in \mathbb{N}^* \text{ et } tp^k \leqslant n\}$

Si $p^k > n$, alors $\alpha_k = \operatorname{card}\left(\{tp^k \ / \ t \in \mathbb{N}^* \text{ et } tp^k \leqslant n\}\right) = 0 = \lfloor n/p^k \rfloor$

Si $p^k \leqslant n$, alors $\{d \in [\![1, n]\!] \ / \ p^k \mid d\} = \{tp^k \ / \ t \in [\![1, \lfloor n/p^k \rfloor]\!]\}$

et donc $\alpha_k = \operatorname{card}\left(\{d \in [\![1, n]\!] \ / \ p^k \mid d\}\right) = \operatorname{card}\left([\![1 \lfloor n/p^k \rfloor]\!]\right)$.

Dans tous les cas, on peut conclure à l'égalité $\boxed{\alpha_k = \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor}$

b) On a $n! = \prod_{d=1}^{n} d$ donc $v_p(n!) = \sum_{d=1}^{n} v_p(d)$

Par ailleurs pour $k \in \mathbb{N}^*$, je note $B_k = \{d \in [\![1, n]\!] \ / \ v_p(d) = k\}$ et on a $\beta_k = \operatorname{Card}(B_k)$

or $[\![1, n]\!] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$, c'est une union disjointe

d'où $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{d \in B_k} v_p(d)\right)$ (somme presque nulle car B_k est vide sauf pour un nombre fini d'indices k)

or pour $d \in B_k$, on a $v_p(d) = k$, donc $\displaystyle\sum_{d \in B_k} v_p(d) = k\text{Card}(B_k) = k\beta_k$

Ce qui justifie l'égalité $\boxed{v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\beta_k}$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, je note $A_k = \left\{d \in [\![1, n]\!] \ / \ p^k \mid d\right\}$ et on a $\alpha_k = \text{Card}(A_k)$

On remarque que $A_k = \left\{d \in [\![1, n]\!] \ / \ p^k \mid d\right\} = \displaystyle\bigcup_{i \geqslant k} B_i$ (réunion disjointe) où B_i est introduit à la question précédente, donc $\alpha_k = \displaystyle\sum_{i=k}^{+\infty} \beta_i$ donc $\alpha_k - \alpha_{k+1} = \beta_k$

les sommes sont bien définies car les familles sont presque nulles, puis on effectue un changement d'indices

Ainsi $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\alpha_k - \alpha_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)\alpha_k$

donc $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k - \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)\alpha_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k$. En utilisant (a), on a l'égalité $\boxed{v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor}$

d) our $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor \leqslant \dfrac{n}{p^k}$ et pour $k \geqslant 2$, on a $\left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor \geqslant 0$ et $\left\lfloor \dfrac{n}{p^1} \right\rfloor \geqslant \dfrac{n}{p} - 1$

Par ailleurs, la série géométrique de $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{n}{p^k}$ de raison $1/p \in]0, 1[$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1}$

ce qui, à l'aide de (c), donne $\boxed{\text{l'encadrement : } \dfrac{n}{p} - 1 \leqslant v_p(n!) \leqslant \dfrac{n}{p-1} \left(= \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p(p-1)}\right)}$

Q 7. Soit l'entier $n \geqslant 2$. On a à l'aide de changement d'indices :

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})A_k = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k A_k - \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k A_{k-1} = \varepsilon_1 A_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k \left(A_k - A_{k-1}\right) - \varepsilon_n A_n$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})A_k = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k a_k - \varepsilon_n A_n$ car $A_1 = a_1$ On a bien $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k = \sum_{k=1}^{n-1}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})A_k + \varepsilon_n A_n}$

II.

Q 8.

a) Soit n un entier naturel non nul.

Si $n = 1$, on a $\ln(n!) = \ln(1) = 0$ et $\displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathscr{P}}} v_p(n!) \ln(p) = 0$ (somme vide)

Sinon, on a $n! = \displaystyle\prod_{\substack{p | n! \\ p \in \mathscr{P}}} p^{v_p(n!)}$ or comme en 6(b), on a pour p premier, $p | n! \iff p \in [\![2, n]\!]$ d'où $n! = \displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathscr{P}}} p^{v_p(n!)}$,

en passant au logarithme, on a également l'égalité : $\boxed{\ln(n!) = \displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathscr{P}}} v_p(n!) \ln(p)}$

b) Soit n un entier naturel non nul.

On a pour $p \in \mathscr{P}$, $\dfrac{v_p(n!)}{n} - \dfrac{1}{p(p-1)} \leqslant \dfrac{1}{p} \leqslant \dfrac{v_p(n!)}{n} + \dfrac{1}{n}$ en utilisant 7(d) car $n > 0$

Comme pour p premier, on a $\ln(p) > 0$, on a

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathscr{P}}} \frac{\ln(p)v_p(n!)}{n} - \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathscr{P}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathscr{P}}} \frac{\ln(p)}{p} \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathscr{P}}} \frac{\ln(p)v_p(n!)}{n} + \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \in \mathscr{P}}} \frac{\ln(p)}{n}$$

donc en utilisant (a) : $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{\ln(p)v_p(n!)}{n}=\frac{\ln(n!)}{n}$

et $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{\ln(p)}{p(p-1)}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(k)}{k(k-1)}\leqslant\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k(k-1)}=K$ série convergente à termes positifs d'après **I**-2

De plus $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{\ln(p)}{n}=\ln(4)$ d'après **I**-6(c)

On en déduit $\boxed{\text{l'encadrement : }\displaystyle\frac{\ln(n!)}{n}-K\leqslant\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{\ln(p)}{p}\leqslant\frac{\ln(n!)}{n}+\ln(4)}$

c) Quand $n\longrightarrow+\infty$, on a d'après la question précédente :

$$\frac{\ln(n!)-n\ln(n)}{n}-K\leqslant\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{\ln(p)}{p}-\ln(n)\leqslant\frac{\ln(n!)-n\ln(n)}{n}+\ln(4)$$

Ainsi en utilisant **I**-3b) : $\displaystyle\frac{\ln(n!)-n\ln(n)}{n}=O(1)$,

donc les deux suites $\displaystyle\left(\frac{\ln(n!)-n\ln(n)}{n}-K\right)_n$ et $\displaystyle\left(\frac{\ln(n!)-n\ln(n)}{n}+\ln(4)\right)_n$ sont bornées

ainsi la suite $\displaystyle\left(\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{\ln(p)}{p}-\ln(n)\right)_{n\geqslant1}$ est également bornée

donc $\boxed{\text{quand l'entier } n \text{ tend vers } +\infty\text{, on a : }\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{\ln(p)}{p}=\ln(n)+O(1)}$

Q 9.

a) Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$.

Je pose également $\varepsilon_k=\dfrac{1}{\ln(k)}$ pour $k\geqslant 2$ et $\varepsilon_1=0$, j'applique alors **I**-8 avec $a_1=A_1=\chi(1)=0$:

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\chi(k)}{k}=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a_k=\left(0-\frac{1}{\ln(2)}\right)A_1+\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{\ln(k)}-\frac{1}{\ln(k+1)}\right)A_k+\frac{A_n}{\ln(n)}$

donc $\displaystyle\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k\in\mathscr{P}}}\frac{1}{k}=\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\ln(k)\ln(k+1)}A_k+\frac{A_n}{\ln(n)}$ donc on a bien $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}}\frac{1}{p}=\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)}A_k+\frac{A_n}{\ln(n)}}$

b) Quand k tend vers $+\infty$, on a : $\displaystyle A_k=\sum_{i=1}^{k}a_i=\sum_{\substack{i\leqslant k\\ i\in\mathscr{P}}}\frac{\ln(i)}{i}=\ln(k)+O(1)$ d'après 1(c)

Par ailleurs $1/k\longrightarrow 0$ et donc $\ln(1+1/k)=1/k+O(1/k^2)$

et $\displaystyle\frac{1}{\ln(k+1)}=\frac{1}{\ln(k)+\ln(1+1/k)}=\frac{1}{\ln(k)\left(1+O\left(\frac{1}{k\ln(k)}\right)\right)}=\frac{1-O\left(\frac{1}{k\ln(k)}\right)}{\ln(k)}=\frac{1+O\left(\frac{1}{k\ln(k)}\right)}{\ln(k)}$

donc $\displaystyle\ln(k)\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k+1)}=\left(1/k+O(1/k^2)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{k\ln(k)}\right)\right)=1/k+O(1/k^2)+O\left(\frac{1}{k^2\ln(k)}\right)$

d'où $\displaystyle\ln(k)\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k+1)}A_k=\left(1/k+O(1/k^2)\right)\left(\ln(k)+O(1)\right)=\ln(k)/k+O(1/k)+O(\ln(k)/k^2)$

Ainsi $\displaystyle\ln(k)\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k+1)}A_k=\ln(k)/k+O(1/k)$ car $\displaystyle\frac{k\ln(k)}{k^2}=\frac{\ln(k)}{k}\to 0$

d'où $\boxed{\text{l'égalité : }\displaystyle\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)}A_k=\frac{1}{k\ln(k)}+O\left(\frac{1}{k\ln^2(k)}\right)}$

c) En utilisant la question précédente, on a $\dfrac{A_n}{\ln(n)} = 1 + O\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right) = O(1)$

En utilisant **I**-1(b), on a $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln^2(k)}$ est une série convergente donc par comparaison à une série à termes positifs, (question précédente) la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\left(\frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)}A_k - \frac{1}{k\ln(k)}\right)$ converge

donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)}A_k - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)} = O(1)$, donc d'après (a), on a

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)\ln(k+1)}A_k + \frac{A_n}{n} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)} + O(1)$$

Avec **I**-1(b) on peut déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'égalité : $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{P}}} \frac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + O(1)}$