Problème 1 - Calcul d'une série et d'une intégrale

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. La partie 3 utilise les résultats des parties 1 et 2.

I. Intégrales et séries

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

On note, sous réserve d'existence,

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t, \quad G(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Q 1. Justifiez l'existence des intégrales $F(\alpha)$ et $G(\alpha)$.

Q 2.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculez $u_n(\alpha) = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha n}\,\mathrm{d}t$. Puis montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha)$ converge.

b) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2 n^2 - 1}$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?

Q 3.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrez l'égalité

$$F(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}$$

Q 4. En effectuant le changement de variable $u = t^{1-\alpha}$ et en le justifiant soigneusement, montrez l'égalité

$$G(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} F\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$$

Q 5. Pourquoi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ? Justifiez ensuite l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha^2 k^2 - 1}$$

II. Trigonométrie et intégrales

Q 6. Soit $z \in \mathbb{C} - \{0, 1, -1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Justifiez l'égalité

$$\sum_{k=-n}^{+n} z^{2k} = \frac{z^{2n+1} - \dfrac{1}{z^{2n+1}}}{z - \dfrac{1}{z}}$$

Q 7. Soit $x \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifiez que $1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=-n}^{+n} e^{ikx}$.

b) Montrez que $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Q 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrez que $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et donnez sa valeur.

III.

Dans cette partie, a désigne un réel compris strictement entre 0 et 1.

On pose $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante : $\varphi(0) = 0$ et si $x \in \,]0,\pi]$, $\varphi(x) = \dfrac{\cos(ax) - 1}{2\sin\frac{x}{2}}$

Q 9. Montrez que φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

Q 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\mathrm{d}x$. Grâce à une intégration par parties que vous justifierez soigneusement, montrez que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(ax)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

Q 11.

a) Calculez v_n en fonction de n et a.

b) Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + I_n + J_n$.

Q 12. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge et donnez la valeur de sa somme en fonction de a.

Q 13. Concluez ce problème en montrant pour tout $\alpha > 1$, l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\alpha \sin\frac{\pi}{\alpha}}$$

Problème 1

I.

Q 1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc en particulier sur $[0,1]$: l'intégrale $F(\alpha)$ est donc une intégrale normale d'une fonction continue sur un segment.

Pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$, or $\alpha > 1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $G(\alpha)$ converge.

Q 2.

a) $u_n(\alpha) = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha n}\, \mathrm{d}t = (-1)^n \left[\frac{1}{\alpha n+1} t^{\alpha n+1}\right]_0^1 = \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}$.

La suite de terme général $\dfrac{1}{\alpha n+1}$ est positive, décroissante et converge vers 0, donc d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha)$ converge.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2 n^2 - 1}\right| \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2 n^2 - 1}$ et $\dfrac{1}{\alpha^2 n^2 - 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha^2 n^2}$, or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\alpha^2 n^2}$ converge (puisque l'exposant de n est strictement supérieur à 1) donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2 n^2 - 1}$ est absolument convergente, donc convergente.

Q 3.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t^\alpha)^k\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^\alpha)^{n+1}}{1-(-t^\alpha)}\, \mathrm{d}t$ (somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison différente de 1).

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t = F(\alpha) - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t = F(\alpha) - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t$.

Donc $F(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|(-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{\alpha(n+1)}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha(n+1)+1}$.

Donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t = 0$.

On sait aussi que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha)$ converge, autrement dit ses sommes partielles convergent vers la somme de la série, donc par passage à la limite dans l'égalité du a, on en déduit que $F(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$.

Q 4. Comme $1-\alpha < 0$, la fonction $t \mapsto t^{1-\alpha}$ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, strictement décroissante et réalise une bijection de $[1,+\infty[$ dans $]0,1]$, donc d'après le th. de changement de variables dans les intégrales généralisées, on a en posant $u = t^{1-\alpha}$ donc $t = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{1-\alpha} u^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\, \mathrm{d}u$:

$$G(\alpha) = \int_1^0 \frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \times \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha-1} \int_0^1 \frac{u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha-1} \int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}+1}\, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} \int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+1}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha-1} F\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

Q 5. Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{1+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ convergent, donc par définition, comme $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t$ converge et elle vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t + \int_1^{1+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\, \mathrm{d}t = F(\alpha) + G(\alpha)$.

D'après la question précédente, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = F(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1} F\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$.

Or d'après la question 3, $F(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ et donc en remplaçant α par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ (qui est aussi strictement plus grand que 1), on a aussi $F\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\frac{\alpha}{\alpha-1}+1} = (\alpha-1)\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha-1} = (\alpha-1)\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j\alpha-1}$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j\alpha+1} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j\alpha-1} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j\alpha+1} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j\alpha-1} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \left(\frac{1}{j\alpha+1} - \frac{1}{j\alpha-1}\right) = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \frac{-2}{j^2\alpha^2-1} = 1 + 2\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{\alpha^2 j^2-1}$

II.

Q 6. $\displaystyle\sum_{k=-n}^{+n} z^{2k} = z^{-2n} \sum_{k=-n}^{+n} z^{2k+2n} = z^{-2n} \sum_{k=-n}^{+n} (z^2)^{k+n} = z^{-2n} \sum_{j=0}^{+2n} (z^2)^j = z^{-2n} \frac{1-(z^2)^{2n+1}}{1-z^2}$ (somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $z^2 \neq 1$)

donc $\displaystyle\sum_{k=-n}^{+n} z^{2k} = \frac{\frac{1}{z^{2n}} - z^{2n+2}}{1-z^2} = \frac{\frac{1}{z^{2n+1}} - z^{2n+1}}{\frac{1}{z} - z} = \frac{z^{2n+1} - \frac{1}{z^{2n+1}}}{z - \frac{1}{z}}$

Q 7.

a) $\displaystyle\sum_{k=-n}^{+n} e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{-1} e^{ikx} + 1 + \sum_{k=1}^{+n} e^{ikx} = 1 + \sum_{k=1}^{+n} e^{i(-k)x} + \sum_{k=1}^{+n} e^{ikx} = 1 + \sum_{k=1}^{+n} (e^{-ikx} + e^{ikx}) = 1 + \sum_{k=1}^{+n} 2\cos(kx)$

b) On utilise le résultat de la question 1 en posant $z = e^{ix/2}$ (remarque : comme $x \in]0,\pi]$, on a bien z différent de 0, 1 et -1).

Alors

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=-n}^{+n} z^{2k} = \frac{(e^{ix/2})^{2n+1} - \frac{1}{(e^{ix/2})^{2n+1}}}{e^{ix/2} - \frac{1}{e^{ix/2}}} = \frac{e^{i(2n+1)\frac{x}{2}} - e^{-i(2n+1)\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{2i\sin((2n+1)\frac{x}{2})}{2i\sin(\frac{x}{2})}$$

Donc $1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$, puis $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Q 8. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$ est continue sur $]0,\pi]$ et est prolongeable par continuité en 0 en lui donnant la valeur $\dfrac{2n+1}{2}$. Donc l'intégrale J_n converge (fausse singularité en 0).

D'après le calcul précédent, $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

III.

Q 9. Sur $]0,\pi]$, φ est le quotient de deux fonctions de classe C^1 donc elle est de classe C^1.

On peut noter que φ est continue en 0, car $\cos(ax) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-(ax)^2}{2}$ et $2\sin\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{a^2}{2}x$.

Enfin, pour tout $x \in]0,\pi]$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{(-a\sin(ax))\sin\frac{x}{2} - (\cos(ax)-1)\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{(\sin\frac{x}{2})^2}$.

Grâce à quelques d.l. en 0 à l'ordre 2, on peut calculez $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varphi'(x)$:

$\sin(ax) = ax + o(x^2)$, $\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x^2)$ donc $(-a\sin(ax))\sin\frac{x}{2} = \dfrac{-a^2x^2}{2} + o(x^2)$

$\cos(ax) - 1 = \dfrac{-a^2x^2}{2} + o(x^2)$, $\cos\frac{x}{2} = 1 - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$ donc $(\cos(ax)-1)\dfrac{1}{2}\cos\frac{x}{2} = \dfrac{-a^2x^2}{2} + o(x^2)$

donc le numérateur $(-a\sin(ax))\sin\frac{x}{2} - (\cos(ax)-1)\dfrac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$ a pour d.l. $\quad -\dfrac{a^2}{4}x^2 + o(x^2)$

or le dénominateur $(\sin\frac{x}{2})^2$ est équivalent à $\dfrac{x^2}{4}$ donc le quotient $\varphi'(x)$ a pour limite $-\dfrac{a^2}{2}$ quand $x \to 0$.

On résume : φ est continue sur le segment $[0,\pi]$, est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ et sa dérivée possède une limite réelle en 0, donc d'après le th. de limite de la dérivée (= th. de prolongement C^1), φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

Tout ça, c'est du programme de Première Année !

Q 10. $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \varphi(x)\sin\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \varphi(x)\psi'(x)\,\mathrm{d}x$ en posant $\psi(x) = -\dfrac{2}{2n+1}\cos\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right)$.

D'après la question précédente, φ est de classe C^1 sur $(0,\pi]$, tout comme ψ : on peut donc intégrer par parties.

$I_n = \Big[\varphi(x)\psi(x)\Big]_{x=0}^{\pi} - \displaystyle\int_0^\pi \varphi'(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{2n+1}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right)\,\mathrm{d}x.$

Donc par inégalité triangulaire, $|I_n| \leqslant \dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\int_0^\pi |\varphi'(x)|.\left|\cos\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right)\right|\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{2}{2n+1}\int_0^\pi |\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x = \dfrac{K}{2n+1}$ où K est une constante indépendante de n.

Par encadrement, on en déduit que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Q 11.

a) $\cos(ax)\cos(nx) = \dfrac{1}{2}\left(\cos((a+n)x) + \cos((a-n)x)\right)$ donc comme $a+n \neq 0$ et $a-n \neq 0$,

$$v_n = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((a+n)x)}{a+n} + \frac{\sin((a-n)x}{a-n}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((a+n)\pi)}{a+n} + \frac{\sin((a-n)\pi}{a-n}\right)$$

or $\sin(t+n\pi) = \sin(t-n\pi) = (-1)^n\sin t$ donc $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2}\left(\dfrac{\sin(\pi a)}{a+n} + \dfrac{\sin(\pi a)}{a-n}\right) = \dfrac{(-1)^n\ a\sin(\pi a)}{a^2-n^2}.$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^n v_k = \int_0^\pi \cos(ax)\sum_{k=1}^n \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(ax)\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$ d'après la partie précédente.

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^n v_k = \int_0^\pi \cos(ax)\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(ax)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\pi (\cos(ax)-1)\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(ax)}{a}\right]_{x=0}^{\pi}$$

$$= I_n + J_n - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$$

Q 12. On sait que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $J_n = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^n v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$.

Autrement dit la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$.

Q 13. Soit $\alpha > 1$, on pose $a = \dfrac{1}{\alpha} \in]0,1]$: on peut donc utiliser les résultats précédents.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ \frac{1}{\alpha}\sin(\frac{\pi}{\alpha})}{(\frac{1}{\alpha})^2 - n^2}$ donc $\frac{1}{\alpha}\sin(\frac{\pi}{\alpha})\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(\frac{1}{\alpha})^2-n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}{2}$

donc $\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-\alpha^2n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}{2}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2n^2-1} = \frac{\pi}{2\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})} - \frac{1}{2}.$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2n^2-1}$

Donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 1 + 2\left(\frac{\pi}{2\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}$$