Problème 1 - Méthode de Cardan

On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$.

Soit (E) l'équation du troisième degré $z^3 + pz + q = 0$ où p, q sont deux complexes. On suppose que p et q sont non nuls, sinon on sait résoudre l'équation en calculant les racines cubiques de $-q$ ou en calculant des racines carrées de $-p$.

L'idée présentée par Jérôme Cardan (mathématicien italien, 1501-1576) pour résoudre l'équation (E) est de se donner un degré de liberté supplémentaire en posant $z = u + v$ et en choisissant judicieusement le produit uv.

Partie 1 - Cas général : calculs dans $\mathbb{C}$.

Question 1) On pose $z = u + v$. Montrez que l'équation (E) est équivalente à $u^3 + v^3 + q = 0$ si on choisit bien la valeur du produit uv.

Question 2) On pose $U = u^3$ et $V = v^3$. Précisez la valeur de $U + V$ et UV et justifiez que U, V sont solutions d'une équation du second degré que vous préciserez.

On sait résoudre une telle équation : on note U_0 l'une des deux racines de cette équation du second degré. Puis on choisit une racine cubique de U_0, ce qu'on sait calculer : on la note u_0.

Question 3)

a) Précisez les trois valeurs possibles de u en fonction de u_0 et de j.

b) Pour chacune des trois valeurs de u, déterminez alors la valeur de z, racine de l'équation (E).

De cette façon, on est capable de résoudre les équations du même type que (E) si on est capable de calculer des racines carrées et des racines cubiques de nombres complexes.

Question 4) On peut maintenant résoudre toute équation du troisième degré. Soit (E') : $z^3+az^2+bz+c = 0$ une équation du troisième degré : montrez que si on choisit bien la valeur du complexe m et si on pose $Z = z - m$, alors l'équation (E') d'inconnue z est équivalente à une équation d'inconnue Z du même type que (E).

Question 5) Deux exemples.

a) Résolvez l'équation $z^3 + 12z - 14 - 18i = 0$.

b) Résolvez l'équation $z^3 - 3z^2 + (9 - 6i)z + (-5 + 12i) = 0$.

Partie 2 - Cas particulier : calculs dans $\mathbb{R}$

Dans cette partie, on suppose que p et q sont réels et on cherche les racines réelles de l'équation (E). On suppose aussi que $p \neq 0$ et $q \neq 0$, car les cas $q = 0$ ou $p = 0$ sont faciles et ne nécessitent pas d'utiliser des idées subtiles pour résoudre l'équation. Enfin, on pose $f : x \mapsto x^3 + px + q$.

Question 1) Si $p > 0$, alors dressez le tableau de variations de f et montrez que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x a exactement une solution réelle, puis justifiez qu'elle possède en plus deux solutions complexes non réelles conjuguées.

Question 2) Dans le cas où $p < 0$, justifiez que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x a

— trois solutions réelles si et seulement si $-4p^3 - 27q^2 > 0$

— deux solutions réelles et aucune complexe non réelle si et seulement si $-4p^3 - 27q^2 = 0$

— une seule solution réelle et deux autres complexes conjuguées si et seulement si $-4p^3 - 27q^2 < 0$.

Ce nombre $\Delta = -4p^3 - 27q^2$ s'appelle le discriminant de l'équation (E).

Question 3) Concluez : quel que soit le signe de p, comment savoir le nombre de solutions réelles de l'équation (E) ?

Question 4) Dans cette question, on suppose $\Delta = 0$. Donnez les racines réelles de l'équation (E).

Question 5) Dans cette question, on suppose $\Delta < 0$.

On note U, V les racines de l'équation du second degré obtenue dans la question 2 de la partie 1. Justifiez que ces deux racines sont réelles. Déduisez-en l'unique racine réelle de l'équation (E) à l'aide de radicaux $\sqrt{\ }$ et $\sqrt[3]{\ }$

Question 6) Dans cette question, on suppose $\Delta > 0$. On va cette fois-ci poser $x = r\cos\theta$ où r est un paramètre qui sera choisi judicieusement par la suite.

a) Calculez $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.

b) Montrez que l'équation (E) est équivalente à l'équation $4\cos^3\theta + \frac{4p}{r^2}\cos\theta = A$ où A est un réel que vous calculerez en fonction de q et r.

c) Donnez la valeur positive de r pour que l'équation (E) soit équivalente à $\cos(3\theta) = A$ en justifiant l'existence de r.

d) On fait désormais ce choix pour r. Donnez une expression de A en fonction de p et q seulement, puis justifiez que l'équation $\cos(3\theta) = A$ d'inconnue θ a des solutions. Combien en-a-t-elle modulo 2π ?

e) Concluez : donnez les trois racines réelles de l'équation (E).

Question 7) Exemples : résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $x^3 - 6x + 4\sqrt{2} = 0$

b) $x^3 + 3x - 2 = 0$

c) $x^3 - x + \frac{1}{3\sqrt{3}} = 0$

Problème 1

Partie 1

Question 1) Avec l'égalité $z = u + v$, on a les équivalences suivantes :

$z^3 + pz + q = 0 \iff u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0 \iff u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q = 0$

Donc si on choisit $uv = \dfrac{-p}{3}$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $u^3 + v^3 + q = 0$.

Question 2) $U + V = -q$ et $UV = (uv)^3 = -\dfrac{p^3}{27}$, donc d'après le cours, U et V sont solutions de l'équation du second degré $X^2 + qX - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

Question 3)

a) u est une racine cubique de U_0 donc $u^3 = u_0^3$ ou encore $\left(\dfrac{u}{u_0}\right)^3 = 1$ donc $\dfrac{u}{u_0}$ est une racine cubique de l'unité : on a donc trois choix possibles pour $\dfrac{u}{u_0}$, qui sont 1, j et j^2.
Donc $u = u_0$ ou $u = j\,u_0$ ou $u = j^2 u_0$.

b) Comme $uv = \dfrac{-p}{3}$, pour chaque valeur possible de u on a une valeur de v, puis une valeur de z puisque $z = u + v$.
Pour $u = u_0$, alors $v = \dfrac{-p}{3u_0}$ et donc $z = u_0 - \dfrac{p}{3u_0}$.
Pour $u = j\,u_0$, alors $v = \dfrac{-p}{3j\,u_0} = \dfrac{-pj^2}{u_0}$ et donc $z = j\,u_0 - \dfrac{pj^2}{3u_0}$.
Pour $u = j^2 u_0$, alors $v = \dfrac{-p}{3j^2 u_0} = \dfrac{-p\,j}{3u_0}$ et donc $z = j^2 u_0 - \dfrac{p\,j}{3u_0}$.

Question 4) $Z = z - m$ donc $z = Z + m$. Donc on a les équivalences :

$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \iff Z^3 + 3mZ^2 + 3m^2Z + m^3 + a(Z^2 + 2mZ + m^2) + b(Z+m) + c = 0$

$\iff Z^3 + (3m+a)Z^2 + (3m^2 + 2am + b)Z + (m^3 + am^2 + bm + c) = 0$

Donc si on choisit $m = \dfrac{-a}{3}$, alors (E') est équivalente à une équation du même type que (E).

Question 5)

a) On applique la méthode exposée précédemment. On pose $z = u + v$ où u,v sont deux complexes tels que $uv = \dfrac{-12}{3} = -4$.
Alors $U = u^3$ est racine de l'équation $X^2 + (-14 - 18i)X + (-4)^3 = 0$, *i.e.* $X^2 - (14 + 18i)X - 64 = 0$.
Son discriminant réduit Δ' vaut $(7 + 9i)^2 + 64 = 32 + 126i$. Soit $\delta' = x + iy$ (x, y réels) une racine carrée de Δ'.
On a alors les trois égalités $\begin{cases} x^2 - y^2 &= 32 \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{32^2 + 126^2} = 130 \\ 2xy &= 126 \end{cases}$, ce qui donne $x^2 = 81$, $y^2 = 49$ et x, y de même signe. Par exemple, je choisis $\delta' = 9 + 7i$.
Donc les deux racines de l'équation du second degré sont $16(1 + i)$ et $2(-1 + i)$.
J'écris les deux racines sous forme trigonométrique, ce qui donne $16\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$. Comme on en choisit une des deux pour en extraire une racine cubique, je choisis la deuxième, car je remarque que $2\sqrt{2}e^{3i\pi/4} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^3$.
Je pose donc $u_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$, puis j'en déduis les racines de l'équation :
$z = (1+i) - \dfrac{4}{1+i} = -1 + 3i$, $z = j(1+i) - \dfrac{4j^2}{1+i} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} - 3\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}i$, et $z = j^2(1+i) - \dfrac{4j}{1+i} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} - 3\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$

b) D'abord je fais disparaître le terme de degré 2 en posant $z = Z + 1$, on obtient l'équation équivalente (E) : $Z^3 + 6(1 - i)Z + 2(1 + 3i) = 0$.
Puis on réapplique la méthode de Cardan (sans détails) :
$z = u + v$, $uv = 2(-1 + i)$; U racine de l'équation $X^2 + 2(1 + 3i)X + 16(1 + i) = 0$;
$\Delta' = -24 - 10i = (1 - 5i)^2$ et racines $-8i$ et $2(-1 + i)$; je choisis $U_0 = -8i = (2i)^3$, puis $u_0 = 2i$;
racines de l'équation (E) : $1 + 3i$, $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)i$ et $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)i$;
racines de l'équation (E') : $2 + 3i$, $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)i$ et $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)i$

Partie 2

Question 1) Si $p > 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + p > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle est continue et que ses limites en les infinis sont infinies et opposées, d'après le th. de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution réelle a.

On peut alors factoriser $(x-a)$ dans $f(x)$, on obtient un facteur de degré deux sans racines réelles donc ayant deux racines complexes conjuguées.

Question 2) Si $p < 0$, alors la dérivée s'annule deux fois : en $b = \sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ et en $-b$ et son signe est facile à déterminer.

x	$-\infty$		$-b$		b		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-b)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$+\infty$

En utilisant plusieurs fois le th. de la valeur intermédiaire, on montre que

- f a trois racines réelles si et seulement si $f(-b) > 0$ et $f(b) < 0$
- f a deux racines réelles si et seulement si $f(-b) = 0$ ou $f(b) = 0$
- f a une racines réelle si et seulement si $f(-b) < 0$ ou $f(b) > 0$ (et donc deux racines complexes conjuguées par le même raisonnement que dans la question précédente)

Or $f(b) = b^3 + pb + q = \dfrac{-p}{3}\sqrt{\dfrac{-p}{3}} + p\sqrt{\dfrac{-p}{3}} + q = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\left((-p)^{3/2} - 3(-p)^{3/2} + 3\sqrt{3}q\right) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\left(-2(-p)^{3/2} + 3\sqrt{3}q\right)$.

Donc $f(b) = 0 \iff 3\sqrt{3}q = 2(-p)^{3/2} \iff (27q^2 = 4(-p)^3 \text{ et } q > 0) \iff (-4p^3 - 27q^2 = 0 \text{ et } q > 0)$

De même, $f(-b) = 0 \iff 3\sqrt{3}q = -2(-p)^{3/2} \iff (27q^2 = 4(-p)^3 \text{ et } q < 0) \iff (-4p^3 - 27q^2 = 0 \text{ et } q < 0)$

Donc finalement $(f(b) = 0 \text{ ou } f(-b) = 0) \iff -4p^3 - 27q^2 = 0$.

De même, $(f(-b) > 0 \text{ et } f(b) < 0) \iff (2(-p)^{3/2} + 3\sqrt{3}q > 0 \text{ et } -2(-p)^{3/2} + 3\sqrt{3}q < 0)$

$\iff -2(-p)^{3/2} < 3\sqrt{3}q < 2(-p)^{3/2} \iff |3\sqrt{3}q| < 2(-p)^{3/2} \iff 27q^2 < -4p^3 \iff -4p^3 - 27q^2 > 0$

C'est ce qu'on voulait montrer.

Question 3) Dans le cas où $p > 0$, $\Delta = -4p^3 - 27q^2 < 0$ et il y a une seule racine réelle. Donc quand on observe tous les cas, on constate que f a une unique racine réelle quand $\Delta < 0$, deux racines réelles quand $\Delta = 0$ et trois racines réelles quand $\Delta > 0$.

Question 4) L'étude précédente montre que quand $\Delta = 0$ (p est alors forcément négatif), alors b ou $-b$ est racine de f :

- si $q > 0$, alors b est racine ; on factorise $f(x)$ par $(x - b)$, on obtient $f(x) = (x - b)\left(x^2 + bx - \dfrac{q}{b}\right)$; on remarque (ou on devine) que b est encore racine du trinôme du second degré, donc l'autre racine est $\dfrac{-q}{b^2} = -2b$!
- si $q < 0$, alors $-b$ est racine deux fois et l'autre racine est $\dfrac{q}{b^2} = 2b$.

Question 5) Le discriminant de l'équation du second degré obtenue dans la question 2 de la partie 1 est égal à $\dfrac{-\Delta}{27}$ donc est strictement positif. Les deux racines de cette équation du second degré sont donc réelles. On connaît les trois racines complexes de (E) et on sait qu'une seule est réelle donc c'est $\sqrt[3]{U} + \sqrt[3]{V}$.

Donc il s'agit ici de $\sqrt[3]{\dfrac{-3\sqrt{3}q + \sqrt{-\Delta}}{6\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\dfrac{-3\sqrt{3}q + \sqrt{-\Delta}}{6\sqrt{3}}}$.

Question 6)

a) Fait en exercice : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

b) Avec $x = r\cos\theta$, (E) $\iff 4\cos^3\theta + \dfrac{4p}{r^2}\cos\theta = \dfrac{-4q}{r^3}$.

c) On choisit $r = 2\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ (remarque : comme $\Delta > 0$, on a forcément $p < 0$) : avec ce choix l'équation (E) est équivalente à $\cos(3\theta) = A$

d) $A = \dfrac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}$. Or $\Delta > 0$, donc $A^2 = \dfrac{27q^2}{-4p^3} \in]-1,+1[$, donc $|A| < 1$. L'équation $\cos(3\theta) = A$ d'inconnue θ a donc des solutions : plus précisément elle en a 6 modulo 2π, qui sont les nombres $\dfrac{1}{3}\arccos A + \dfrac{2k\pi}{3}$ et $-\dfrac{1}{3}\arccos A + \dfrac{2k\pi}{3}$, où $k \in \{0,1,2\}$.

e) Les 6 valeurs de θ vont donner seulement 3 valeurs pour le cosinus, car parmi ces 6, 3 sont les opposées modulo 2π des trois autres et la fonction cosinus est paire !

Les racines réelles de l'équation sont donc les nombres $2\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\cos\left(\dfrac{1}{3}\arccos A + \dfrac{2k\pi}{3}\right)$ où $k \in \{0,1,2\}$.

Question 7)

a) $\Delta = 0$: on applique ce qui a été montré avant, les racines sont $\sqrt{2}$ et $-2\sqrt{2}$.

b) $\Delta < 0$: on a une unique racine réelle qui est $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$

les deux racines complexes non réelles étant $j\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - j^2\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ et $j^2\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - j\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$

c) $\Delta > 0$: on applique la méthode de la question 6, on a $r = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $A = \dfrac{-1}{2}$, les racines sont les réels $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}\right)$ où $k \in \{0,1,2\}$.